Support de cours

Cours:

## PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet)

Vidéo:

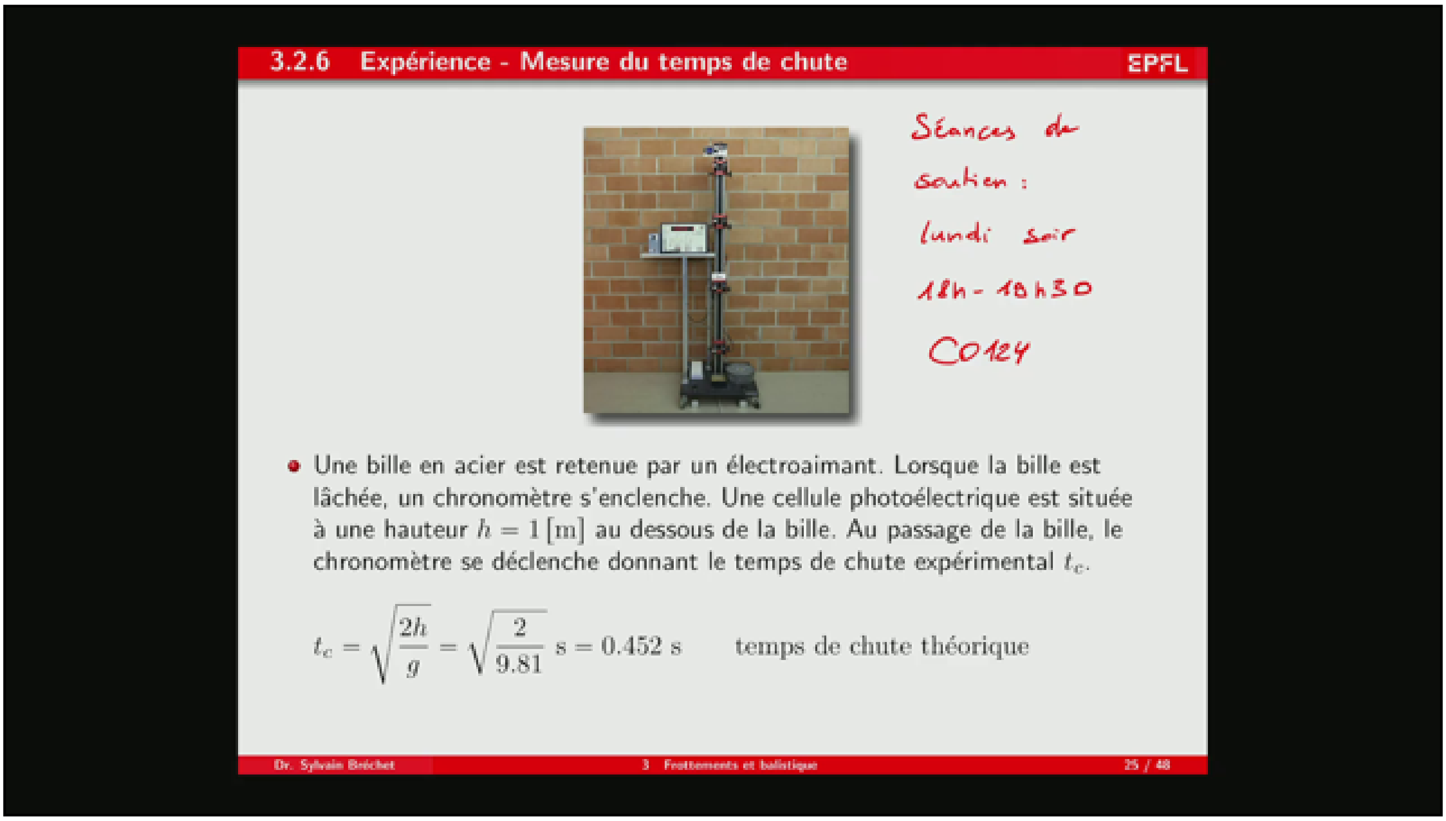
# A3 - Frottements et balistique

Concepts (extraits des sous-titres générés automatiquement) :

**F2t. X infinie. G2t. Vitesse initiale. Équation de la vitesse. Termes de la coordonnée horizontale. Force de frottement. Temps de chute théorique. Première heure. V infini. Bon mathématicien. Frame alpha. Variable t. Fois tao. Deuxième chose.**

vers la recherche de séquences vidéo
(dans PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet).)

vers la vidéo

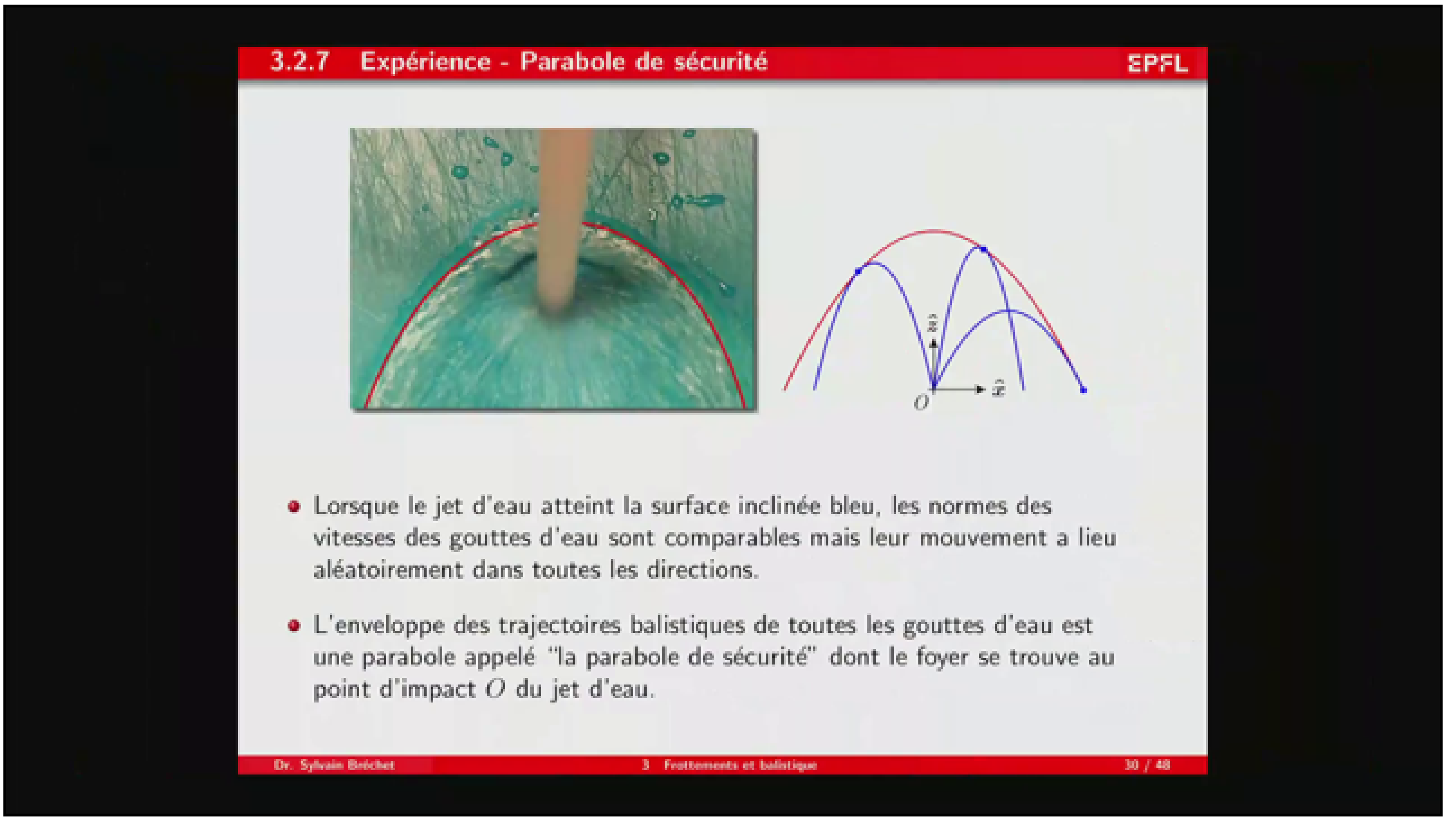



...

notes

résumé

0m 0s

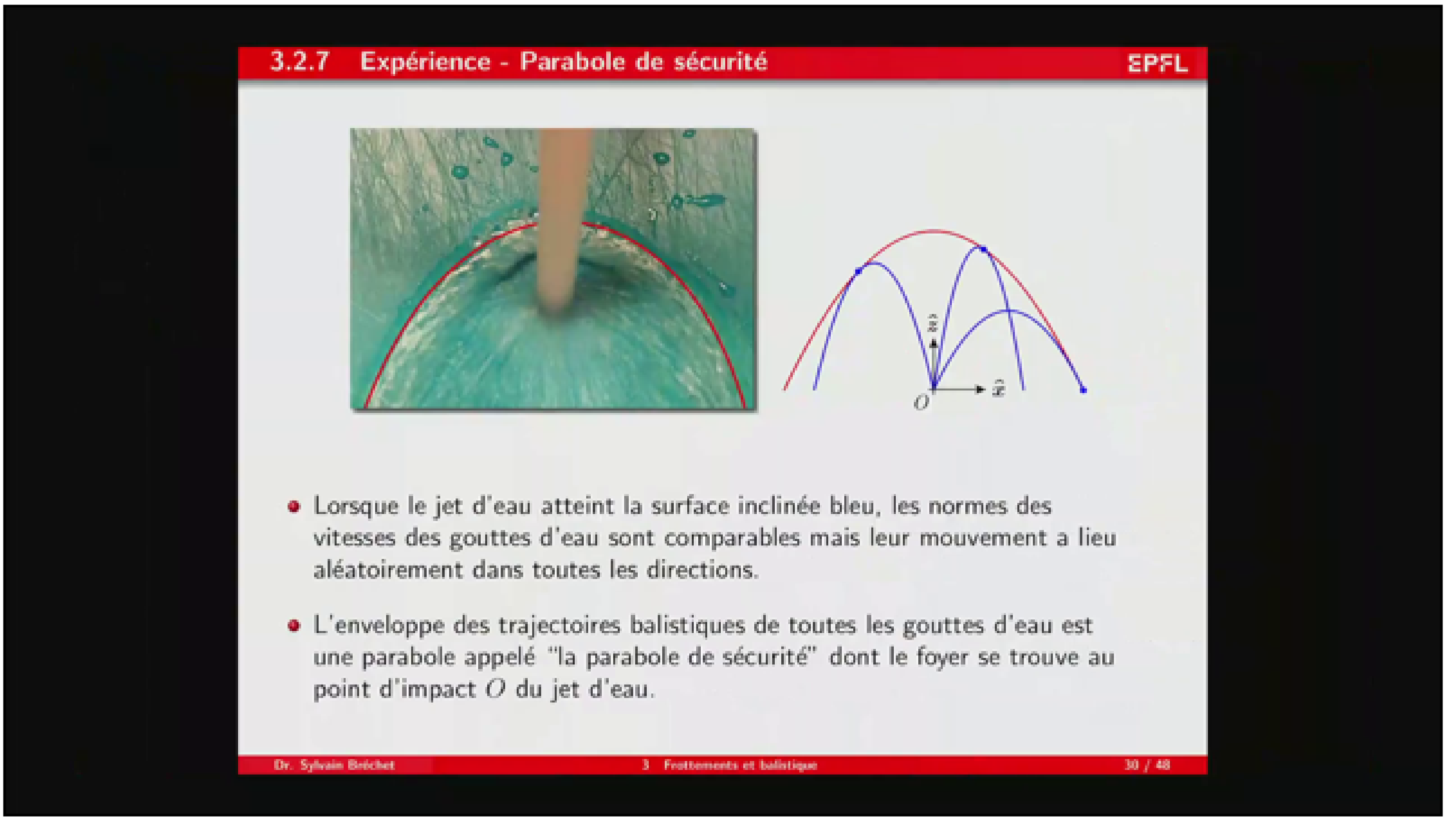



Ces sous-titres ont été générés automatiquement ... Voilà. Avant de revenir dans le vif du sujet, j'aimerais mentionner que dès la semaine prochaine, il y aura des séances de soutien qui seront organisées le lundi soir, de 18h à 19h30, en salle CO124, qui sont réservées uniquement à cette classe, donc aux étudiants de la section de mathématiques. Vous avez deux physiciens théoriciens qui vont vous épauler et vous aider dans la compréhension des arcs à l'un de la mécanique et de la résolution des séries d'exercice. Cette semaine, d'ailleurs, le dernier exercice que vous allez avoir en séries d'exercice est le célèbre problème dit de l'accident, qui est en fait un problème tiré de la virée, où un ancien président des PFL avait été mandaté comme expert pour statuer des responsabilités, dans le cas d'un accident survenu dans les rues de Lausanne. Il en a fait un petit problème et il s'est dit que ce serait un joli problème pour ses étudiants. Et voilà, il est passé à la postérité. Il y a une question en arrière, oui. Quel jour ? C'est le lundi soir. D'accord ? Le lundi de 18h à 19h30, si jamais c'est écrit sur les slides. J'aimerais revenir sur une question qui m'a été posée en fin de matinée concernant la force de frottement en régime statique. Cette force s'oppose toujours à la force de traction, d'accord, qui est exercée sur l'objet, pour éviter de bouger. Donc, si vous voulez écrire la force de manière vectorielle, vous pouvez prendre la norme, la multiplier par le vecteur unitaire orienté dans le sens de la force de traction, ça serait un vecteur T chapeau, d'accord, et puis vous rajoutez un signe moins devant. Et ça sera toujours vrai, d'accord ? Il y a une chose qui n'a pas fonctionné durant la première heure et pour cause, il y avait une permutation entre les cellules photoélectriques. Donc, ce

notes

résumé

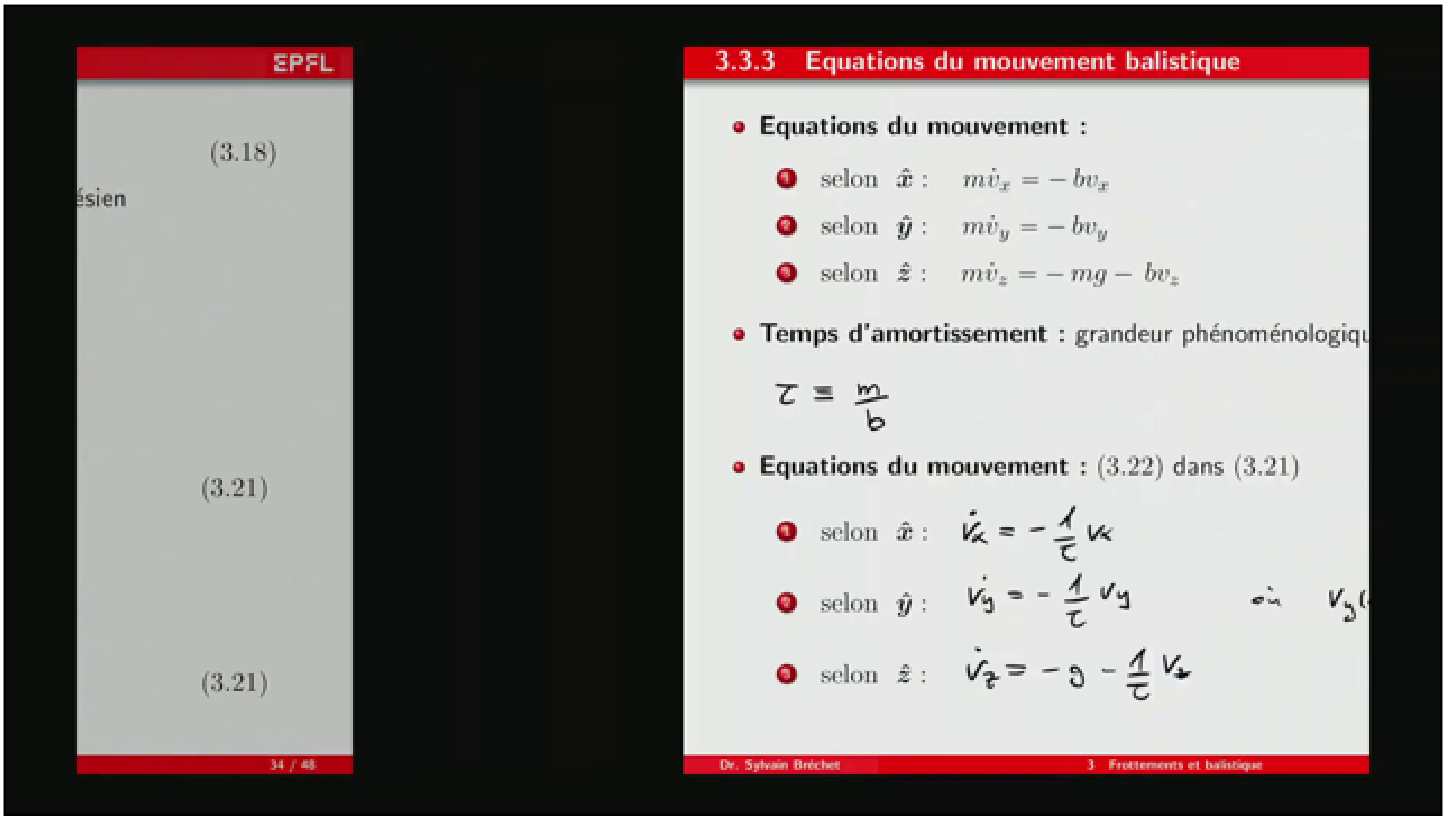
0m 1s




qu'on était en train de mesurer, ce n'était pas une chute libre, c'était une chute libre d'un mètre et demi. D'accord ? Alors, maintenant, tout est bon. Donc, on va faire le test ensemble. On a vu que le temps de chute théorique pour une bille qui est lâchée sans vitesse initiale, qui chute donc d'un mètre de hauteur, c'est la racine de deux H sur G, soit la racine de 2 sur 9,81, et le résultat est en seconde, c'est 452 milliseconds. Alors, vérifions ça ensemble, d'accord ? Vous avez ici un électroaiement qui retient une bille en métal. Je vais lâcher la bille au moment où la bille est lâchée. Le chronomètre s'enclenche. Lorsqu'il passe devant la cellule qui est ici, il se déclenche et le temps va s'afficher. Alors, pour ceux qui sont assez devant, vous avez carrément à le voir, sinon je vous donnerai la valeur. 450,7 millisecondes. Le temps théorique est de 452 millisecondes. Voyez donc que c'est très, très bon. D'accord ? Ce qui veut dire qu'on peut effectivement négliger les frottements généraires. Alors, ça ne dépend pas de la masse, et donc, si au lieu de prendre une boule en métal, je prends une boule en plastique et qu'on refait la même expérience, on devrait trouver le même temps. Vérifions, enfin, évidemment à quelques toutes petites incertitudes prises. D'accord ? On redémarre le dispositif. 450,4 millisecondes. D'accord ? Voyez qu'on est très proche. Je suspecte, d'ailleurs, la cellule d'être un tout petit peu plus haute que le devraient, parce qu'on a une erreur systématique sur les deux boules. D'accord ? Mais c'est très léger. Il s'agit peut-être de quelques fractions de millimètres. D'accord ? Voilà. Terminons le cours de ce matin.

notes

résumé

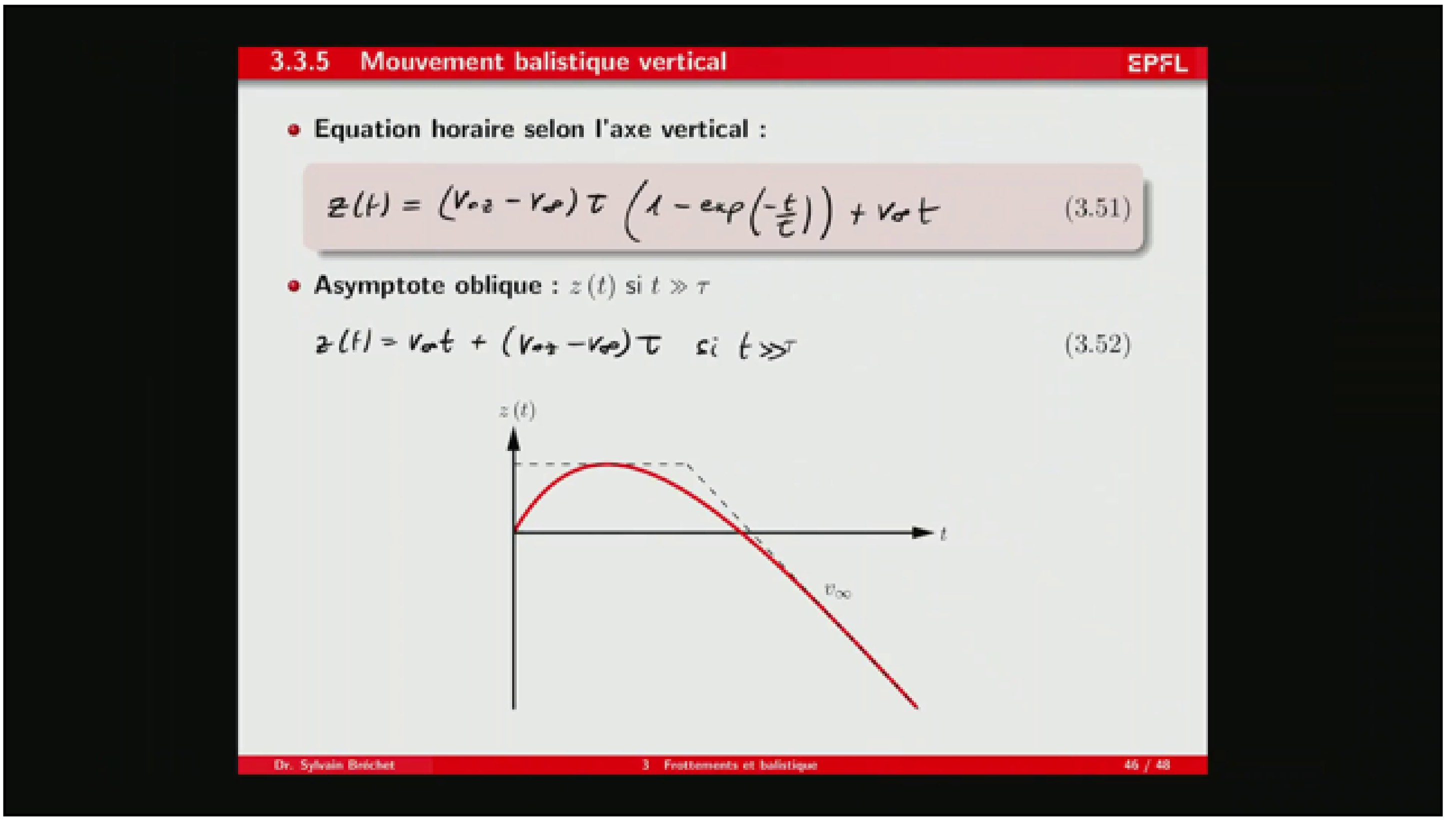



On l'a presque terminé, mais pas tout à fait.

notes

résumé

4m 12s

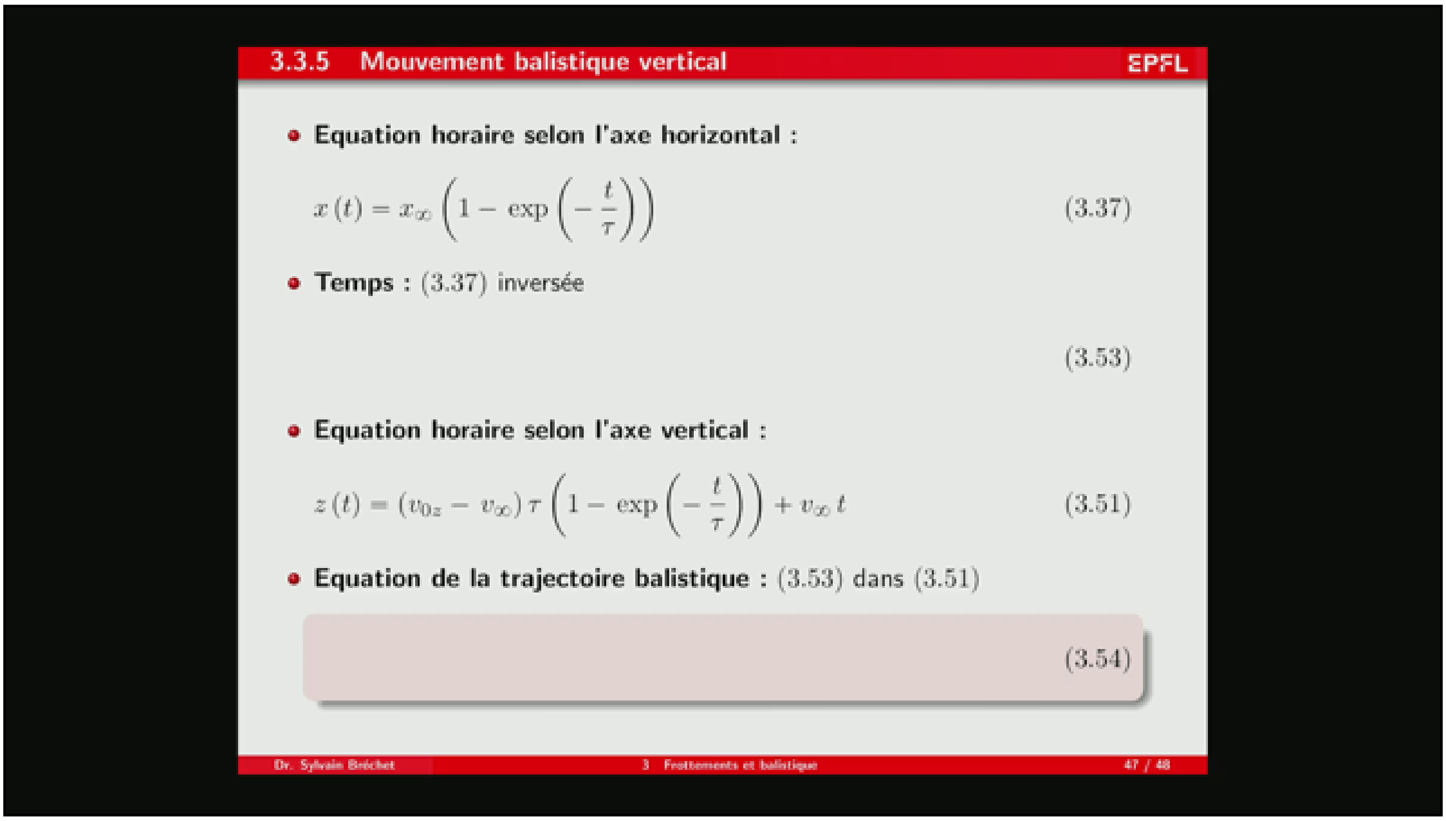



On va le faire maintenant. Donc, on a trouvé l'équation de la vitesse pour la coordonnée verticale. On a trouvé l'équation horaire aussi,

notes

résumé

4m 14s

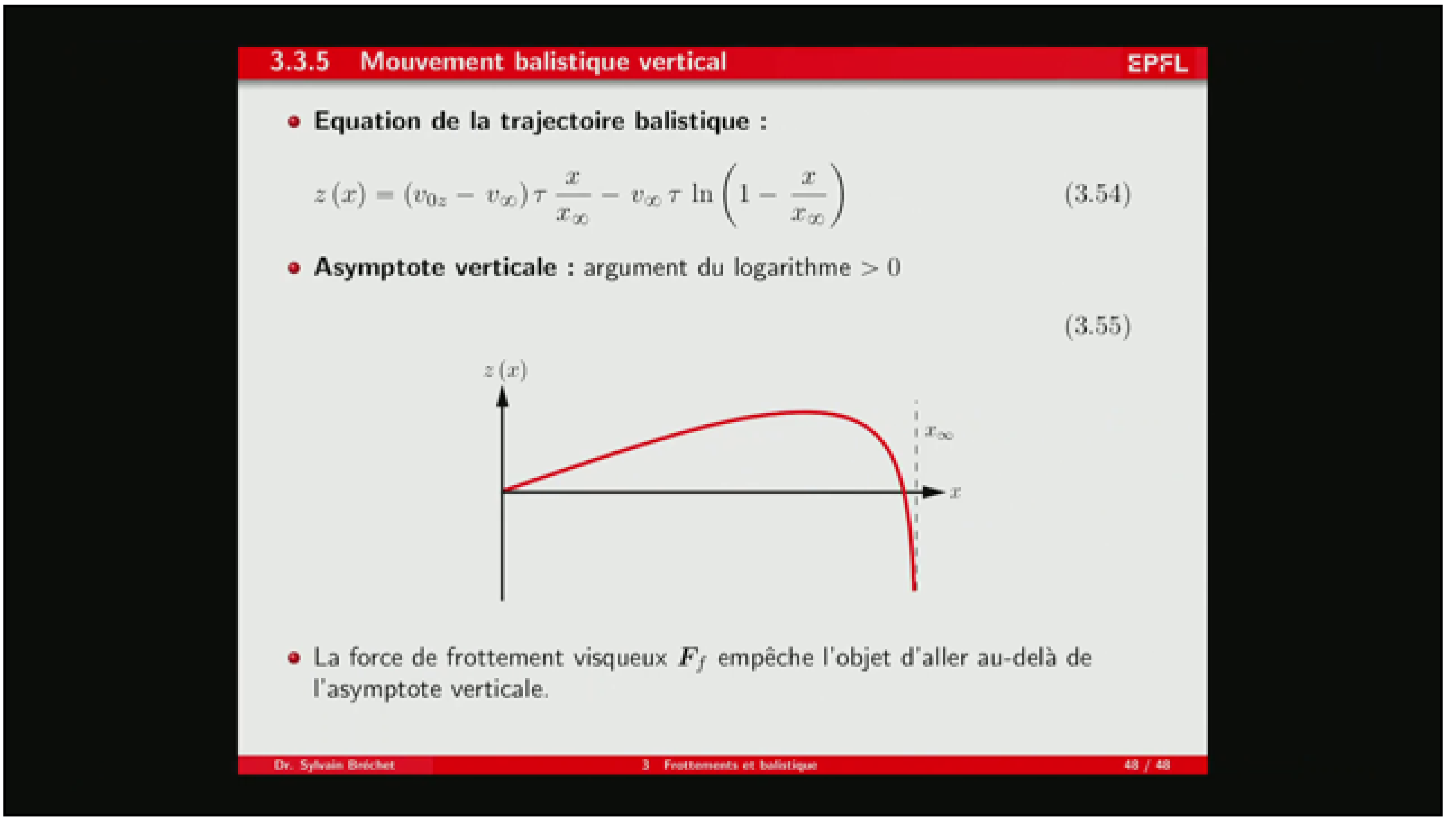



et on s'est arrêté là-dessus. Ce qu'on aimerait trouver, maintenant, c'est l'équation de la trajectoire balistique en présence de frottement. D'accord ? Donc, on a ici l'équation horaire, c'est l'axe horizontal, l'équation horaire, c'est l'axe vertical. On va devoir les combiner, pour faire disparaître le temps et ainsi exprimer la coordonnée verticale en termes de la coordonnée horizontale. Qu'est-ce qu'on fait dans une telle situation ? On inverse l'équation la plus simple. Je n'ai pas dit qu'elle est simple. Je dis la plus simple. La plus simple, clairement, c'est la première. Donc, ce qu'il faut faire, c'est prendre cette équation, exprimer le temps en fonction de x. D'accord ? Ok ? Donc, ce qu'on va faire, c'est qu'on va diviser par x infinie. On va soustraire 1,

notes

résumé

4m 26s




on multiplie globalement par moins 1, ce qui nous donne l'exponential de moité sur ta. On en prend l'hogarritme naturel, en multiplie par mointao. Et on a alors que T de x, c'est mointao, qui multiplie le logaritme naturel de 1 moins x sur x infinie. D'accord ? Bon, maintenant, on prend ce résultat, qu'on vient substituer dans l'équation horaire, selon l'axe vertical. Bon. Alors, si on la substitue là-dedans, ce qui va nous rester, entre parenthèses, c'est 1x sur x infinie. D'accord ? Là, on va se retrouver avec le terme qui est là en log. Et donc, on aura que z de x, c'est v0z moins v infinie, qui multiplie tao, qui multiplie x sur x infinie, moins v infinie, fois tao, foie de logaritre de 1 moins x sur x infinie. D'accord ? Alors, lisons-le franchement, c'est pas une fonction très sympathique, dont on voit tout de suite, de manière patente et claire, le graphe. D'accord ? On peut se faire, on peut trouver ça rapidement, avec le frame alpha, avec Mathématica, etc. Mais il faut d'ailleurs être un très bon mathématicien, avoir beaucoup d'expérience pour voir directement le graphe en regardant cette équation. D'accord ? En regardant cette forme.

notes

résumé

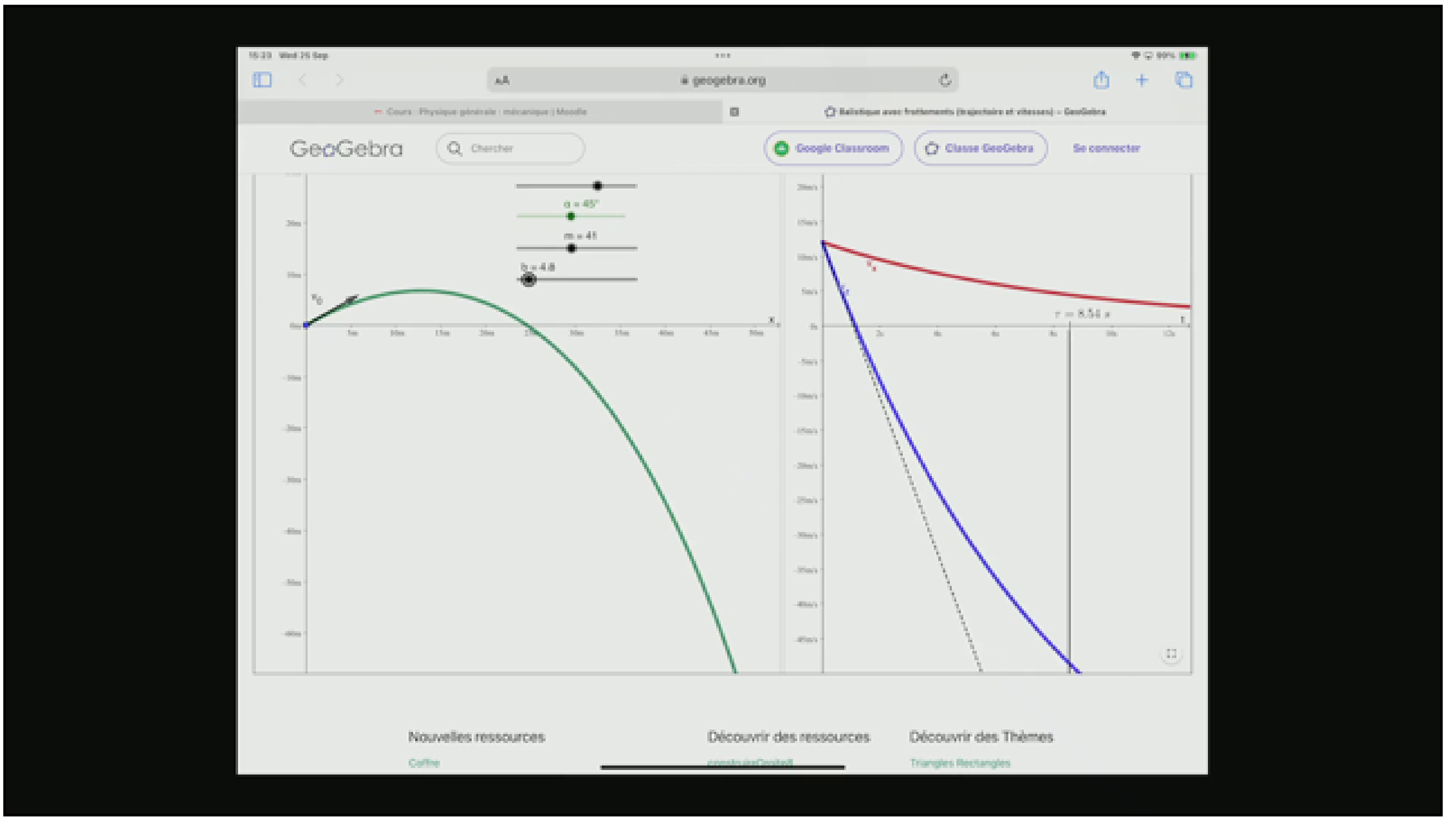
5m 13s


Bon, alors la première chose qu'on peut quand même dire, c'est que si on regarde la formule qui est là, l'argument du logarithm doit être positif, d'accord ? Pour qu'il soit positif, il faut que 1 moins x sur x infinie soit plus grand que z. Et donc, clairement, ce qu'il faudra, c'est que x soit plus petit que x infinie. Ça veut dire quoi ? C'est-à-dire que concrètement, le point matériel pourra jamais dépasser une certaine distance horizontale à cause du frottement qui le feraient. D'accord ? Donc on a ici cette asymptote verticale qui apparaît sur la trajectoire d'un autre point matériel. La deuxième chose qu'on voit, là évidemment, j'ai un peu forcé le trait, c'est que c'est plus symétrique. Pourquoi ? Parce que la force de frottement vient, si vous voulez, comprimer la partie droite du graph. Donc on n'a plus une parabole. On a une parabole qui a été comprimée sur la droite. D'accord ? Donc voilà à peu près le graph que ça peut donner. D'accord ? Alors quand on a quelque chose comme ça, le plus simple, honnêtement, c'est d'aller voir ailleurs, mais au bon endroit,

notes

résumé

6m 46s

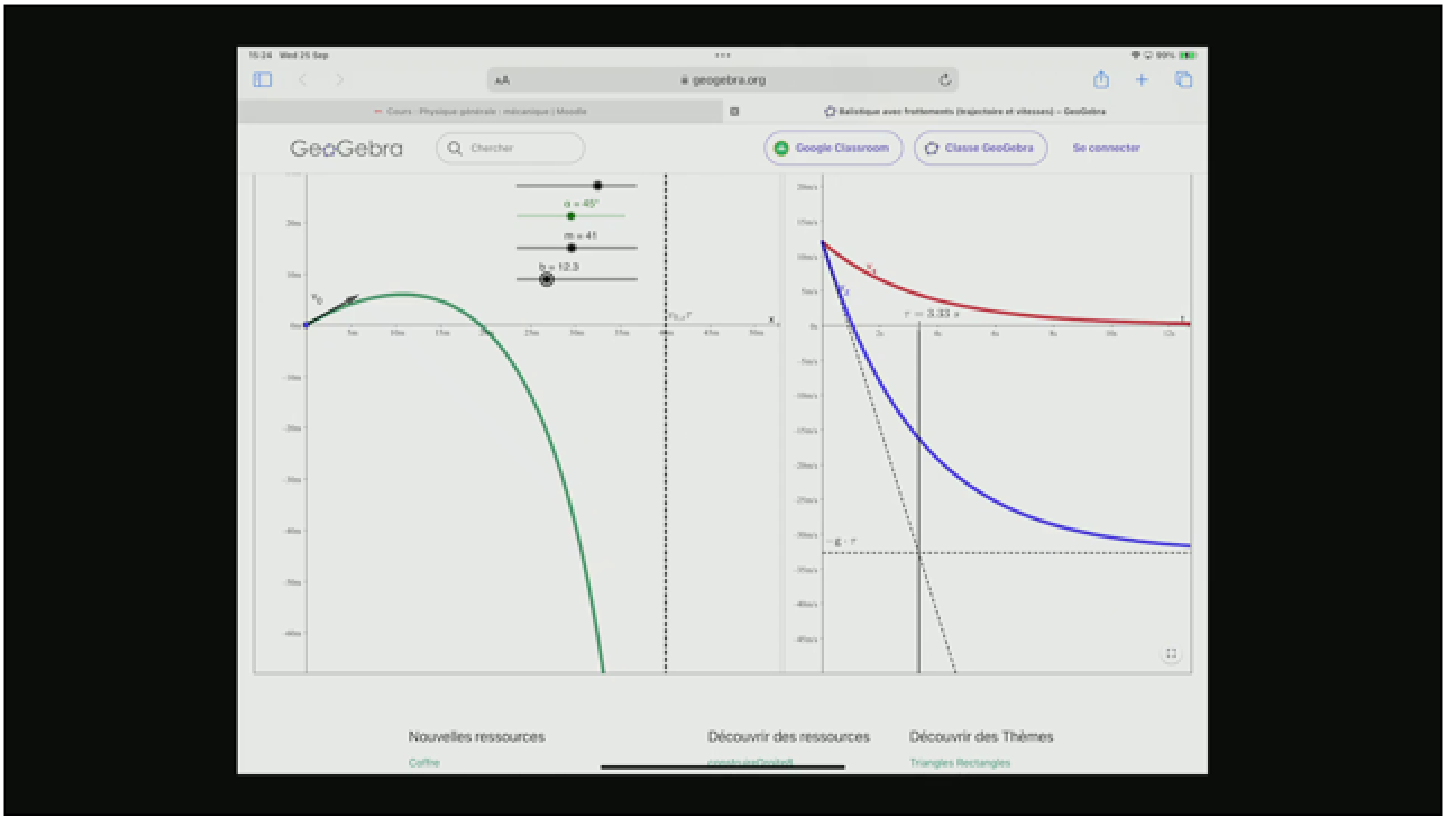



c'est-à-dire qu'on va aller regarder ce que ça donne, par exemple, sur G.O.G.Brain. D'accord ? Alors maintenant, on reprend le même graphe que tout à l'heure, on n'avait pas de frottement, on va introduire du frottement. Je vous rappelle que le frottement est déterminé par le paramètre B, qui est proportionnel à la force de frottement, et le temps d'amortissement est inversément proportionnel à Tau, et B est proportionnel à F, donc inversément proportionnel à Tau. Ok, donc... Si on ajoute un peu de frottement,

notes

résumé

7m 56s




B devient non nul, et qu'est-ce qu'on voit apparaître ? Regardez le graphe de la vitesse, de la composante horizontale, de la vitesse qui apparaît en rouge, de la composante verticale qui apparaît en bleu. Voyez, maintenant, qu'il y a une décroissance exponentielle qui va se faire, qui est caractérisée par ce temps d'amortissement à ou qui apparaît lorsqu'on veut lier entre elles les asymptotes obliques et horizontales. D'accord ? Si on augmente encore un peu plus le frottement, on va même avoir apparaître, c'est ça.

notes

résumé

8m 29s


Sur le graphe de gauche qui nous donne la trajectoire, donc la coordonnée verticale en fonction de la coordonnée horizontale, on voit apparaître cette asymptote verticale qui est cette droite qui apparaît en traitillée. D'accord ? Et là, vous voyez, maintenant, que le graphe dépend de la masse. D'accord ? Si B est nul, eh bien le mouvement ne dépend pas de la masse, mais en présence d'infraînement, c'est plus le cas. D'accord ? Donc on peut jouer avec ces différents paramètres, et puis si on a vraiment un frottement qui est très important, vous voyez, on a quelque chose qui va commencer à ressembler si on fait un zoom out.

notes

résumé

8m 59s


Voilà. À la représentation graphique que je vous ai donnée, donc on a vraiment quelque chose qui n'est plus symétrique. D'accord ? Le frottement vient comprimer la partie droite de ce graph. OK ? Alors ce qu'on aimerait faire maintenant, c'est regarder comment le frottement, en première approximation, va réduire la portée. La portée, c'est quoi ? C'est la distance au sol parcourue par l'objet. Donc si on a une trajectoire parabolique et en absence de frottement, on a quelque chose de symétrique, on a une certaine distance qui sera parcourue par notre point matériel. OK ? Alors avant de faire l'exercice, j'aimerais faire une petite expérience de lancer de boules avec vous, qui s'apparente à de la pétanque locale. D'accord ? Donc vous avez ici la piste d'atterrissage. OK ? Et ce qui est intéressant, et on va le voir ensemble, c'est que si vous voulez regarder la portée et que vous prenez, disons, deux angles qui sont complémentaires, d'accord ? Donc des angles dont la somme donne 90°, vous allez obtenir sensiblement la même portée.

notes

résumé

9m 33s


D'accord ? Théoriquement, c'est exactement la même. Dans la pratique, vu que l'une est lobée, l'autre est un peu plus rasante, il y a des petits décalages, mais c'est à peu près la même chose. Donc on va commencer par un angle de lancer de 60°, donc une trajectoire qui est bien lobée. Regardez ce que ça donne. Elle habillait dedans, parfait. D'accord ? Donc on a un impact qui est par là. OK, répétons l'expérience maintenant pour l'angle complémentaire, qui est un angle de 30°. Alors, il faut que j'arme le dispositif. Hop ! Voilà, ce que je vais faire, c'est le dire comme ça. Attendez, s'il est un petit peu sur la trajectoire, vous pouvez éviter qu'il y ait une collision, on va l'enlever, voilà. C'est parce qu'il était un peu plus rasant, qu'il était plus loin, mais normalement, ça devrait être à peu près au même point. Et puis, si on prend maintenant un angle de 45°, alors ça, il faudra que je le tienne à la main. Hop ! Voilà. 45°, c'est ça. Là, l'angle est son propre complémentaire. Et ça veut dire quoi ? Ça veut dire que la trajectoire sera telle que la portée est maximale. Regardez. La balle va plus loin, d'accord ? Alors, ceci, on peut le vérifier sous le graphe. Si on prend un B qui est nul, voilà.

notes

résumé

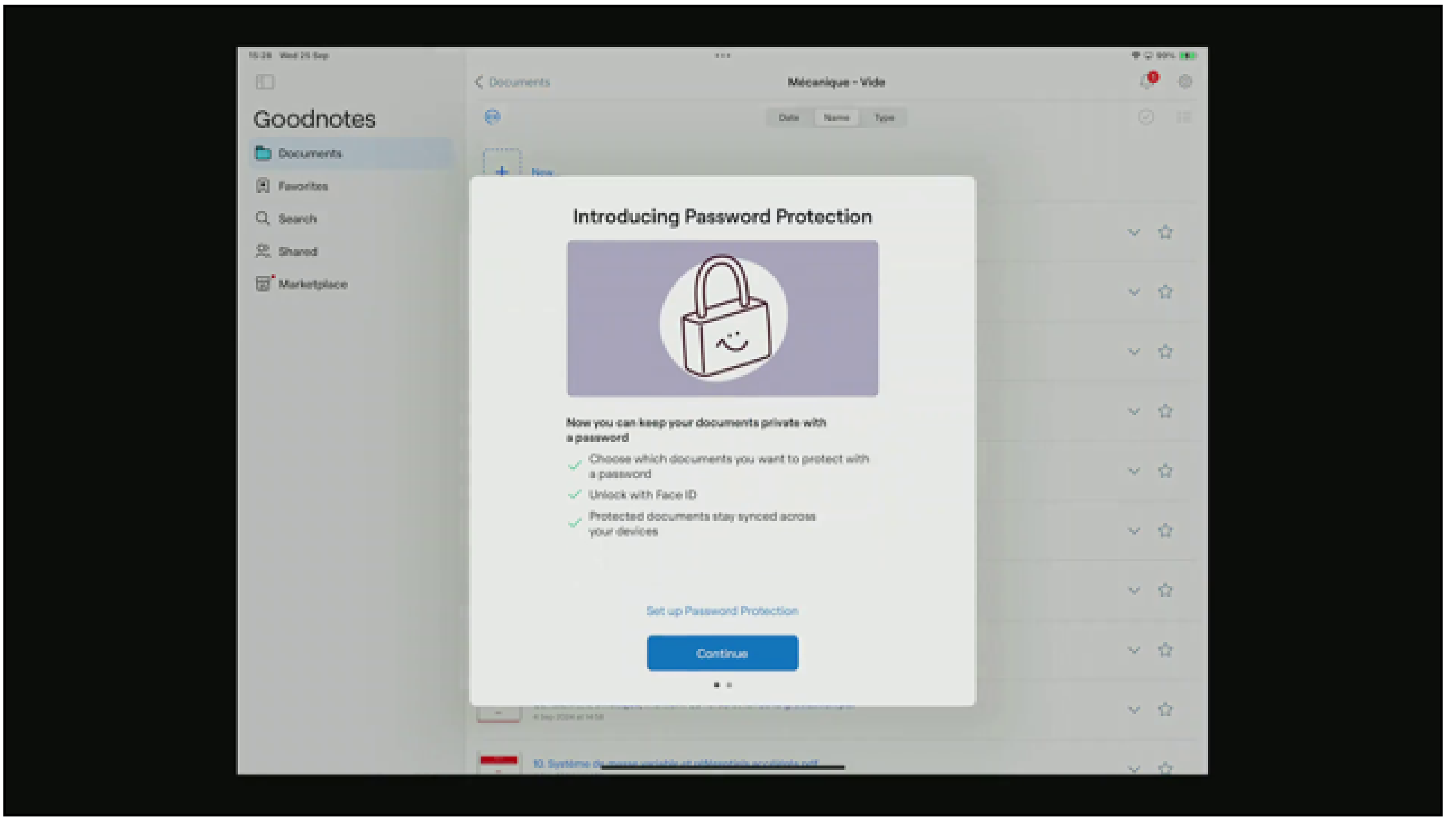
10m 37s


Ça, c'est la solution qu'on obtient pour un angle de 45°. On voit à peu près qu'il faut et sur ce graphe, 30 m pour que la balle touche le sol. Maintenant, si je prends un angle de 30°. Hop. Vous voyez, la trajectoire va intercepter le sol plutôt à 25 m. Faisons l'exercice maintenant pour un angle complémentaire de 60°. Voilà, c'est la même valeur. Voilà, c'est la même valeur. Il y a cette complémentarité dans les solutions que vous verrez apparaître en exercice, en faisant le calcul explicitement. Ce qui nous intéresse évidemment, c'est ce qui se passe en présence de frottement.

notes

résumé

12m 11s

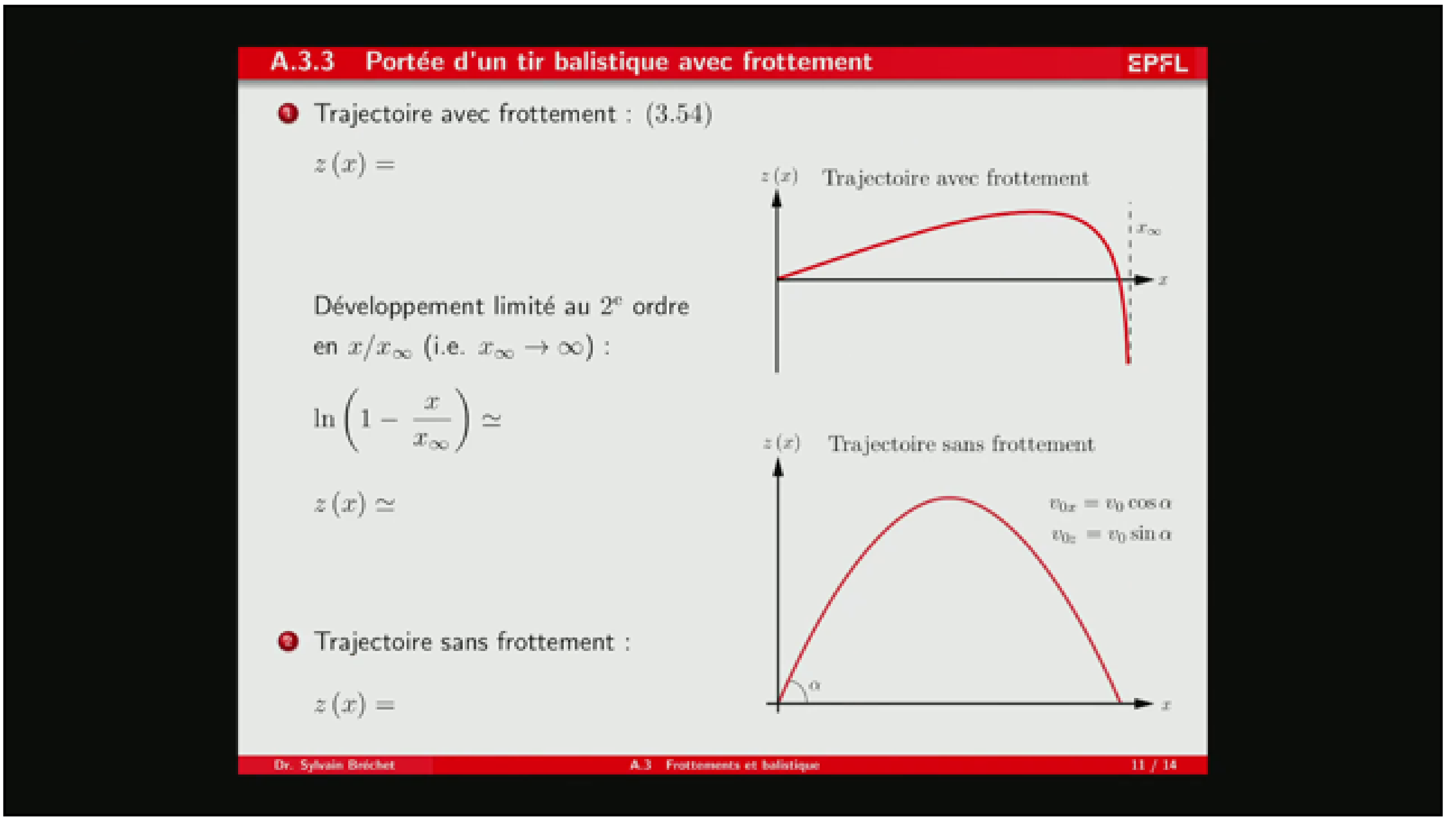



Ce que je vous propose de faire maintenant, c'est de prendre dans les applications de cours la dernière application qui est la plus intéressante du point de vue des maths. Et si le temps le permet, on discutera des solutions générales dans un deuxième temps. Alors...

notes

résumé

13m 0s

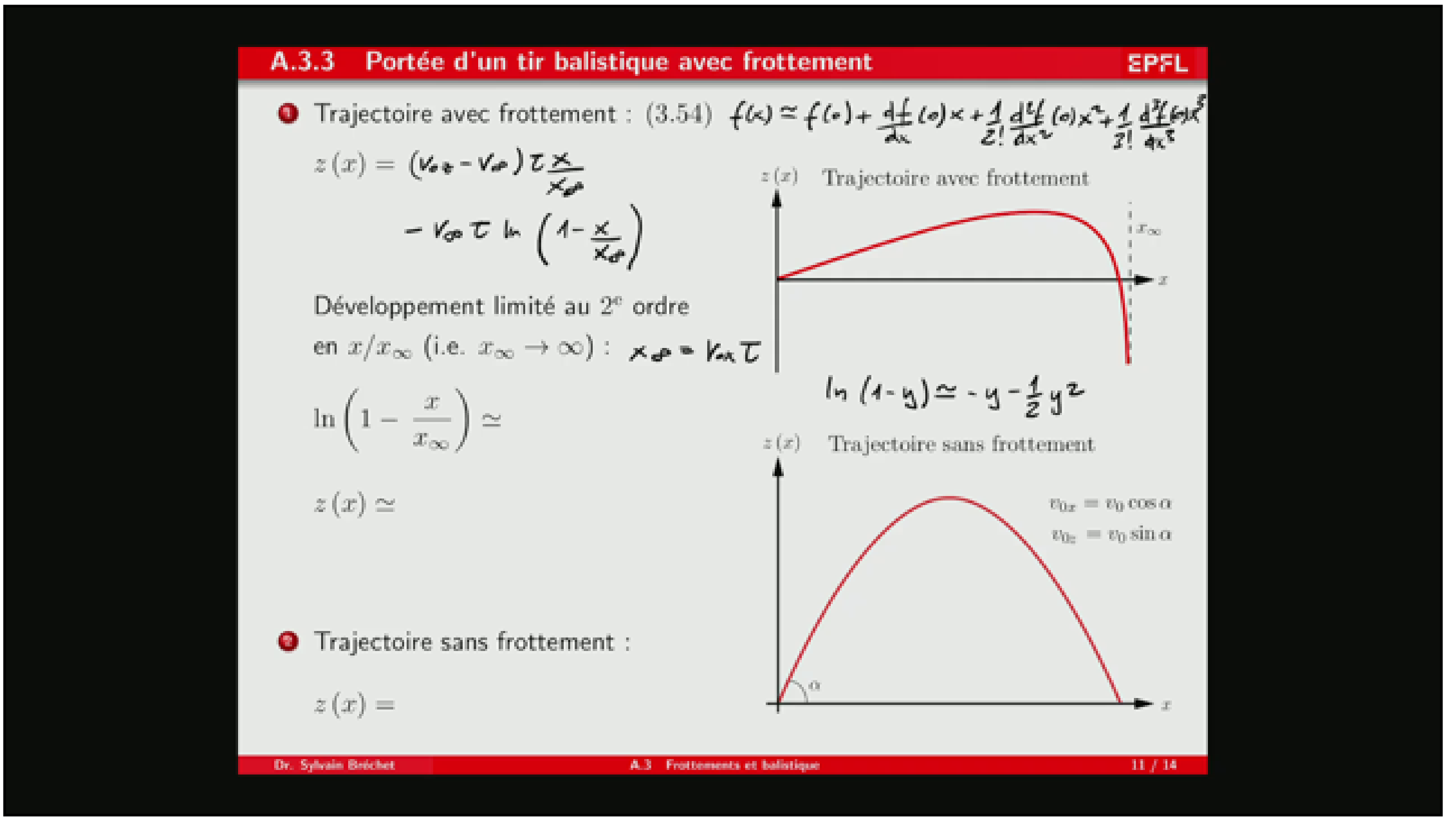



Là, voici... Donc, c'est celle qui est à la page 10. C'est la portée d'un tir ballistique avec frottement. On va commencer comme ça. Et puis...

notes

résumé

13m 17s

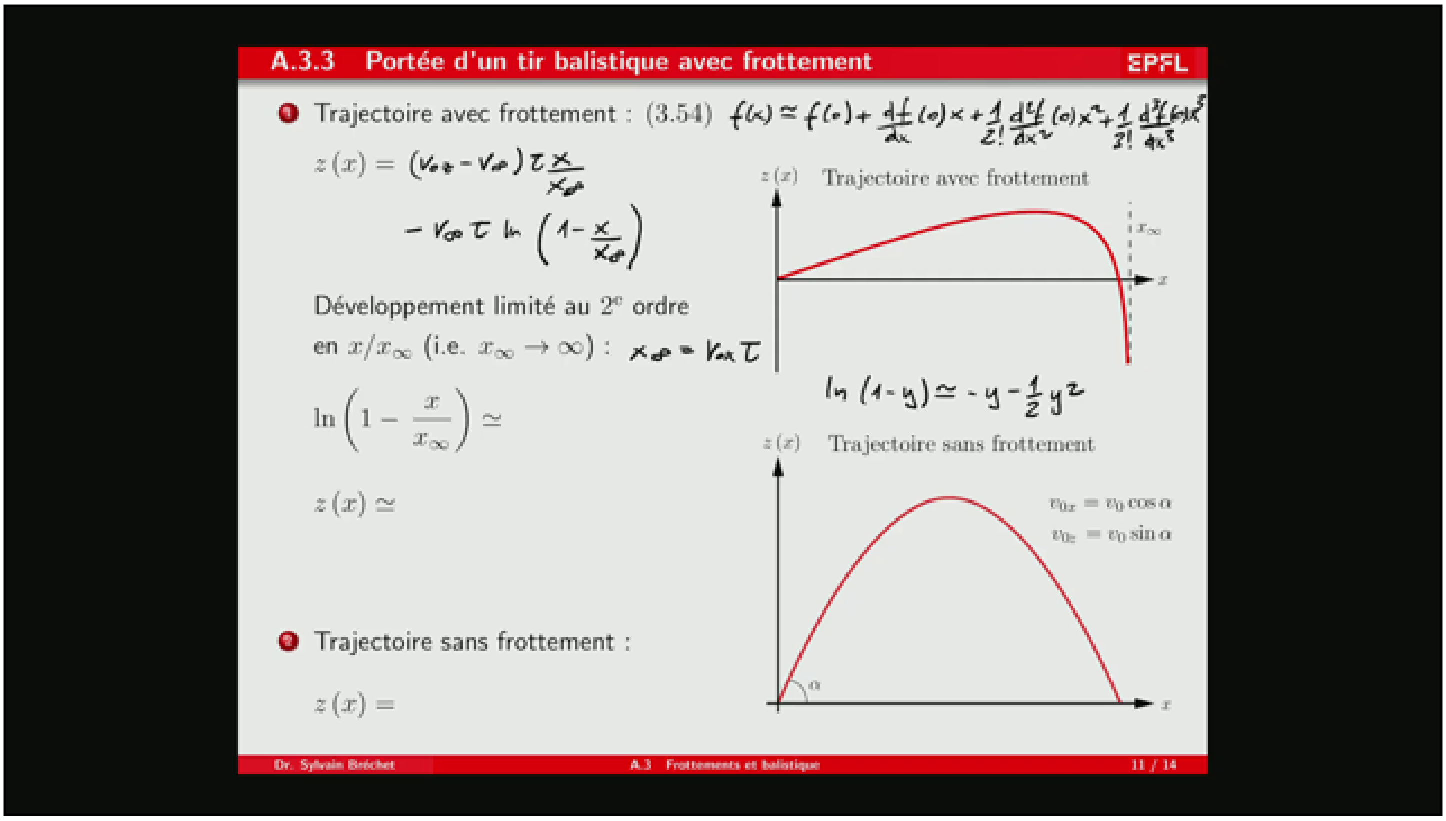



On a donc comme première équation l'équation de la trajectoire qu'on vient d'établir ensemble. Donc, on a la coordonnée verticale en fonction d'accordonnée horizontale, z de x, qui est donc v0z moins v infini, qui multiplie tau, fois x sur x infini. Puis on a le deuxième terme en log, qui est moins la vitesse limite, fois le temps d'amortissement, fois l'hogarrité naturelle, de l'argument qui est en moins x sur la coordonnée maximale horizontale qui est x infine. D'accord ? Ça, c'est notre trajectoire avec frottement, qui est résumé ici. Bon, alors maintenant, on aimerait faire un développement limité pour tenir compte de la première contribution du frottement lorsque le frottement est suffisamment faible. Si le frottement est nul, ça veut dire que le temps d'amortissement est infini, tau, temps vers l'infini. Donc, si le frottement est faible, c'est que le temps d'amortissement est assez grand. D'accord ? Or, si on prend x infini, x infini à la structure suivante, cv0x qui est donné, fois tau. Donc, si tau est très grand, x infini est grand aussi. Donc, x sur x infini sera petit. Donc, on peut faire un développement limité en termes de la variable qui est x sur x infini qu'on va appeler y. Et alors, dans un premier temps, on va tenter un développement limité au deuxième ordre. On prendra le logaritre de 1 moins y qui, au deuxième ordre, va s'écrire de la manière suivante. Ça sera moins y, moins une demi, 2y². Pourquoi ? Je vais vous donner la formule générale et là, on y rend troisième ordre. Parce que si on a une fonction f2x qu'on développe autour de 0, c'est f2o, plus une correction au premier ordre qui est la dérivée de f par rapport à x évalué en 0, x, plus une correction du deuxième ordre qui assure deux factorials, il faut la dériver seconde de f par rapport à x

notes

résumé

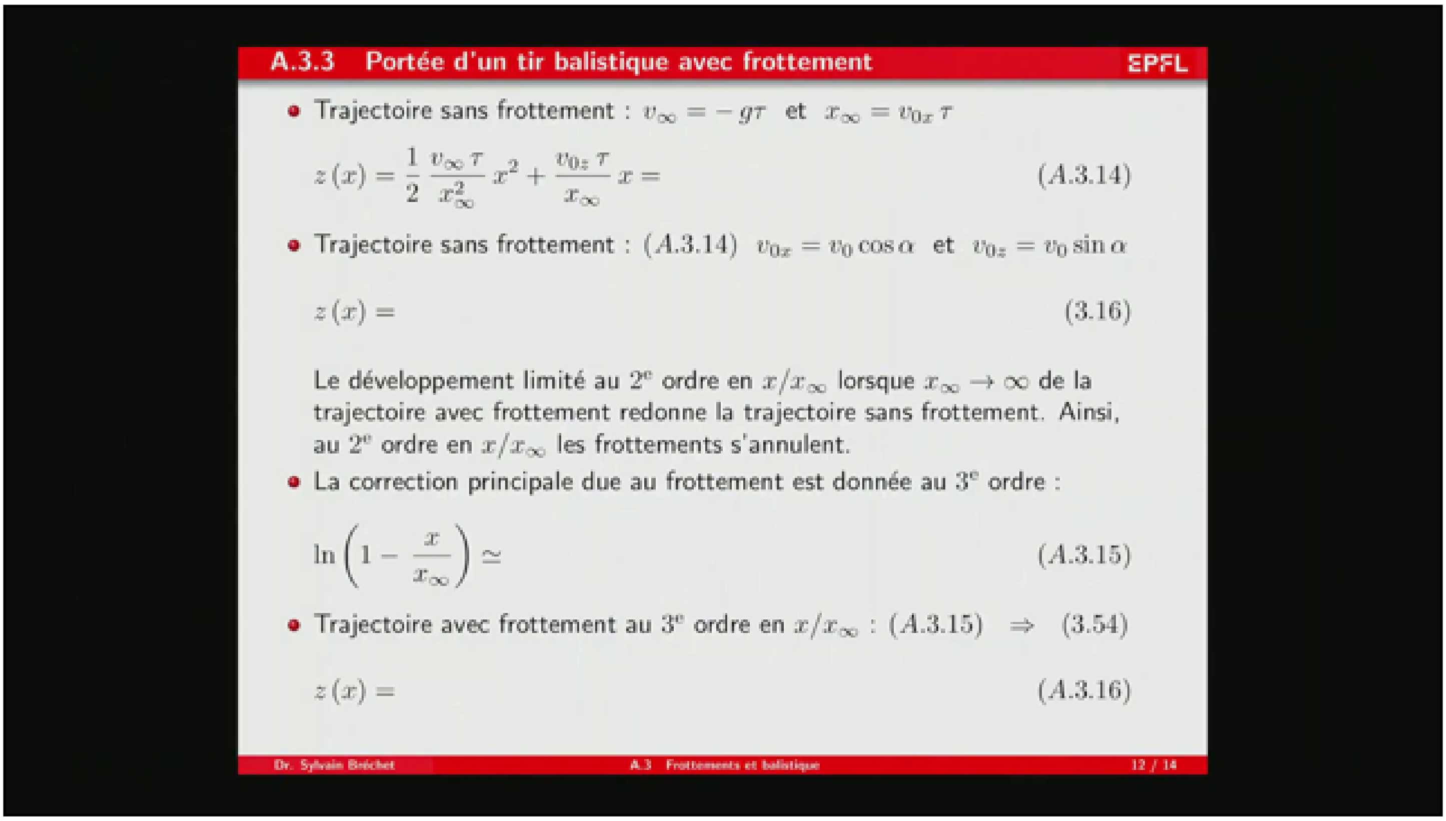
13m 39s




évalué en 0, $x^2$, plus une correction du troisième ordre qui est 1 sur 3 factorials, il faut la dériver troisième de f par rapport à x évalué en 0, $x^3$. D'accord ? Nous, on s'arrête dans un premier temps au deuxième ordre.

notes

résumé

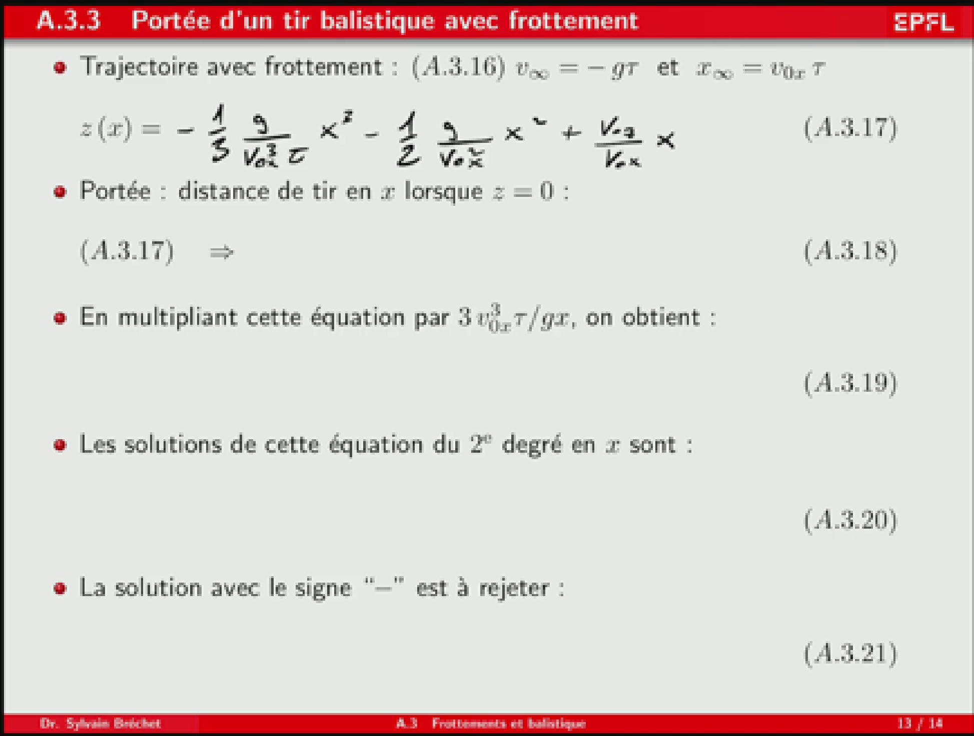



Alors si on fait cet exercice et qu'on calcule les dérivées de la fonction logaritre de 1 moins y, on se retrouve avec deux termes qui seront donc moins y, moins une demi, 2y². Je vous rappelle qu'ici y, c'est x sur x³. D'accord ? Et donc le log de 1 moins y sur x³ au deuxième ordre, ce sera x sur x³ moins une demi de x sur x³ élevée au quartier. Alors maintenant, on effectue la substitution. Le premier terme reste tel quel dans l'expression de la trajectoire, c'est v0z moins v³ qui multiplie le temps d'amortissement fois le rapport de x sur x³. Et puis alors le deuxième terme prend la forme suivante, c'est moins v³ fois tau qui multiplie moins x sur x³ moins une demi de x² sur x³ au quartier. Ok ? Bon. Alors ce qu'on voit tout de suite, c'est que le terme qui est ici va se simplifier avec le terme qui est là. Donc il reste deux termes. Ok ? Ces termes sont les suivants. On a d'abord une demi de v³ tau sur x³ au quartier, fois x³ et le deuxième terme sera v0z fois tau sur x³ qui multiplie x. D'accord ? On a effectivement l'équation d'une trajectoire. Alors ici pour l'instant, on pourrait penser que dans cette trajectoire, il y a des termes qui dépendent du frottement parce qu'il y a un tau qui apparaît. Oui mais attention. La vitesse limite ainsi que la position d'accord d'adapte, c'est maximal que peut atteindre l'objet vers lequel est le temps. D'accord ? Dépendre de tau. Maintenant on va détailler ceci et ce qu'on va voir, c'est qu'au deuxième ordre, on va retrouver la trajectoire sans frottement. D'accord ? Donc vérifions.

notes

résumé

16m 1s

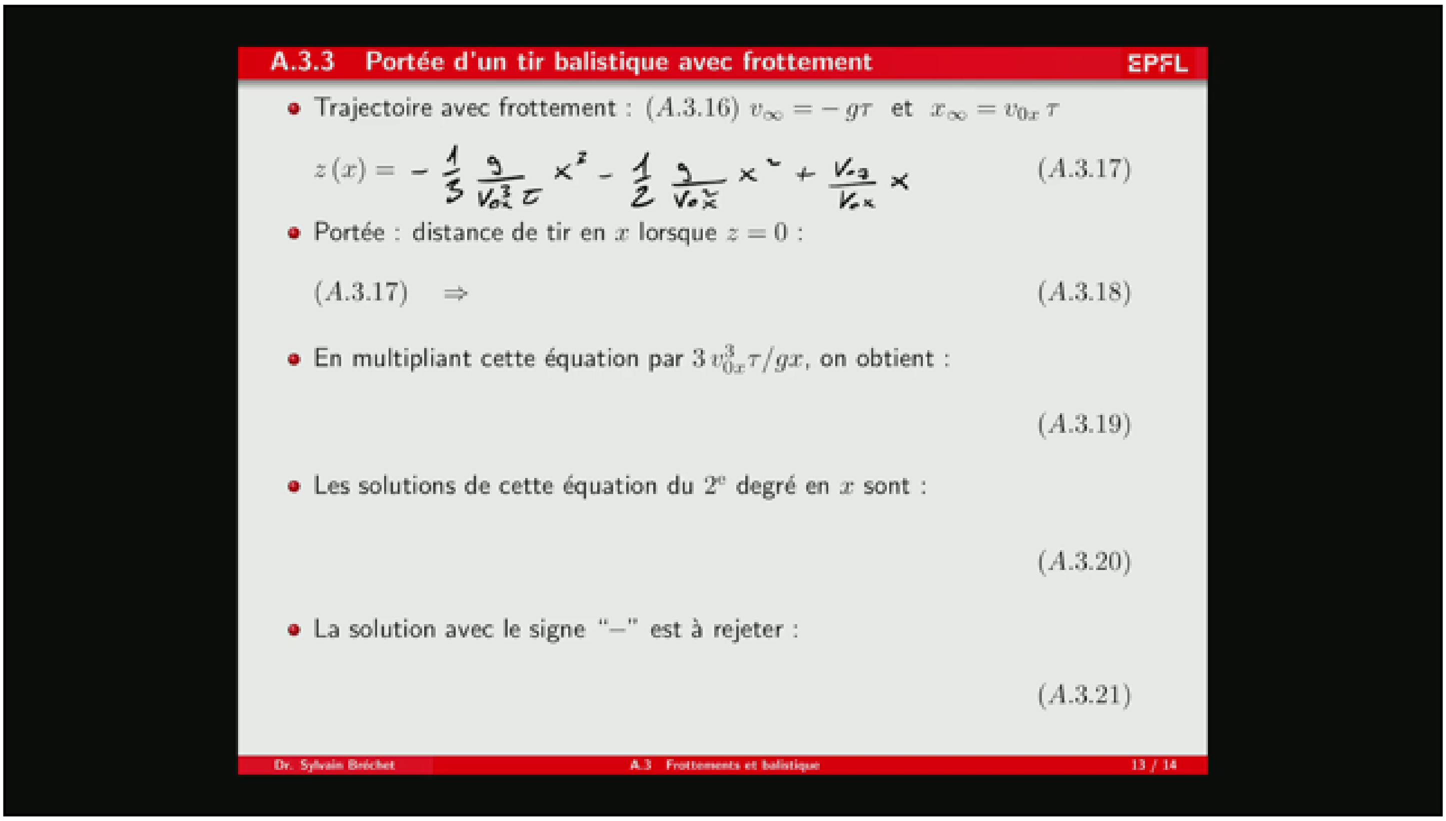



Si on remplace v1 finie par moins gtau, x1 finie par v0xtau, d'accord ? Ce qu'on trouve en fin de compte. C'est moins une demi de g sur v0x au carré, x2 au carré, plus v0z sur v0x qui multiplie x. Oui ? Ah pardon, ça, vous savez, c'est du matériel confédéral, ça vient de Berne, des fois c'est un peu lent. Voilà. Donc maintenant, si vous regardez le développement ici, que vous remplacez donc la coordonnée d'absiste de votre vitesse v0x par v0cosα et la coordonnée verticale v0z par v0sinα, d'accord ? Le terme qui est ici sera la tangent de α, x, et ici, au dénémiateur, vous avez un v0 carré cos4α. On retrouve exactement l'expression mathématique de la trajectoire du point matériel en absence de frottement. D'accord ? Notons-la quand même. C'est moins une demi de g sur v0carré cos4α, x2 au carré, plus la tangente de αx. Ok. Le message, c'est qu'on n'a pas été assez généreux dans notre développement. On ne devait pas s'arrêter au deuxième ordre. On a été un peu rapide en affaire. On devrait aller au troisième ordre pour tenir compte de la première correction liée au frottement. Et c'est ce qu'on va faire maintenant. Donc on va développer au troisième ordre le log de 1-x sur x, ce qui va nous donner moins x sur x, moins une demi de x sur x, élevée au carré, moins entière de x sur x, élevée au cube. Et le terme de degréenne, vous pouvez le deviner, aurait été 1 sur n, x sur x, élevée à la puissance. On va s'arrêter au troisième ordre. Et donc le terme de troisième ordre, ici, on va le mettre en premier dans l'expression de la trajectoire. Ce terme sera un tiers de v∞ sur x∞ élevée au cube, de toute x³, plus une demi de v∞ sur x∞ élevée au carré, fois x², et puis reste

notes

résumé

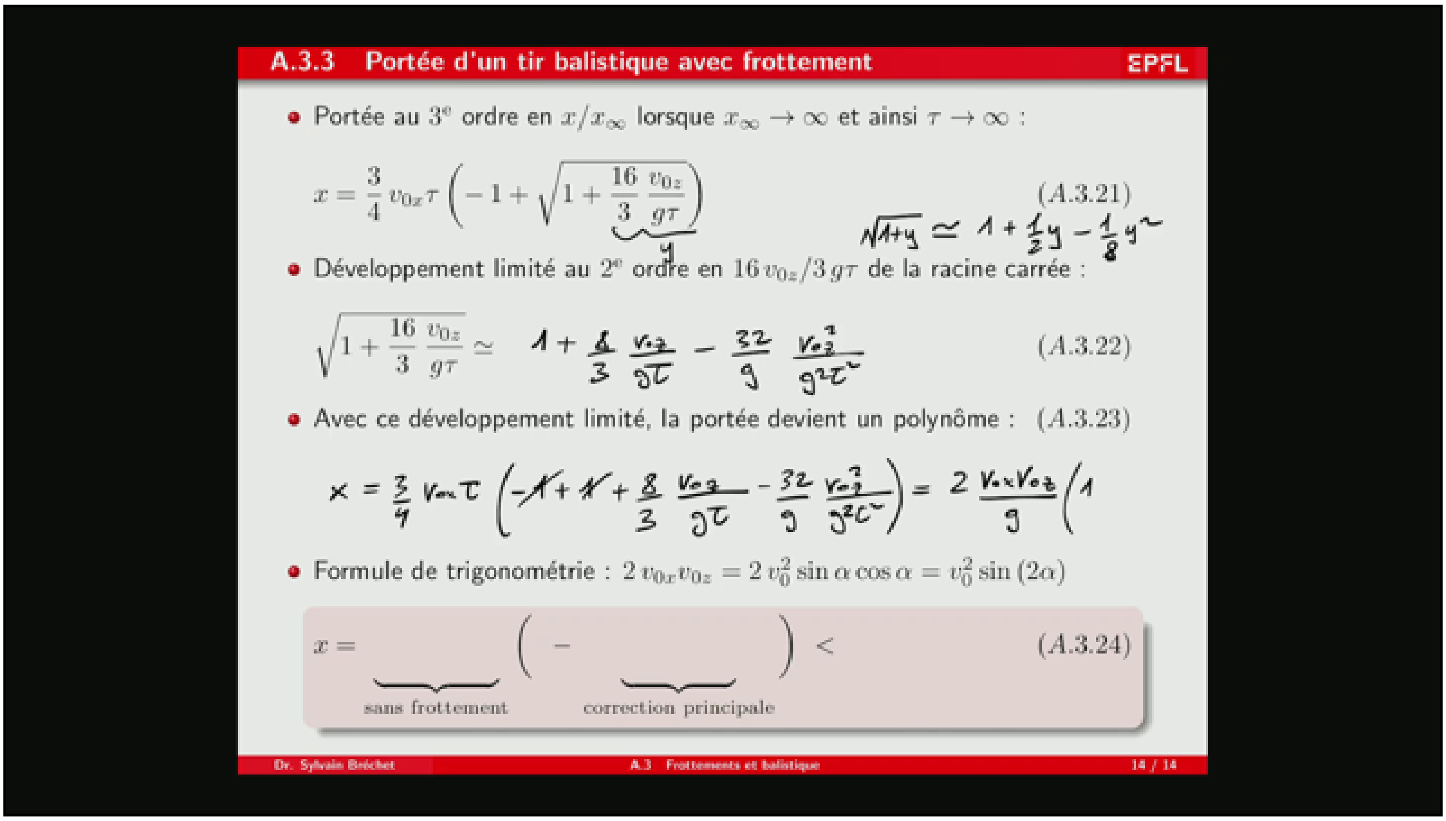
18m 2s




un dernier terme, qui est v∞ sur x∞, le tout fois x. D'accord ? Nous, ce qui nous intéresse concrètement, c'est de trouver la distance parcourue au sol lorsque le point matériel arrive au sol, c'est-à-dire à la fin de sa trajectoire. D'accord ? Alors, dans un premier temps, on va, comme on l'a fait précédemment, remplacer v∞ et x∞ par leur expression en termes de tau. Et si on fait ceci, on aura moitié de g sur v∞ sur $x^3$, fois tau, la toute fois $x^3$, plus une demi de g sur v∞ au carré, fois $x^2$, plus le rapport de v∞ sur v∞, fois x. Ok ? Pour trouver la distance au sol, il faut partir du principe que la coordonnée verticale

notes

résumé

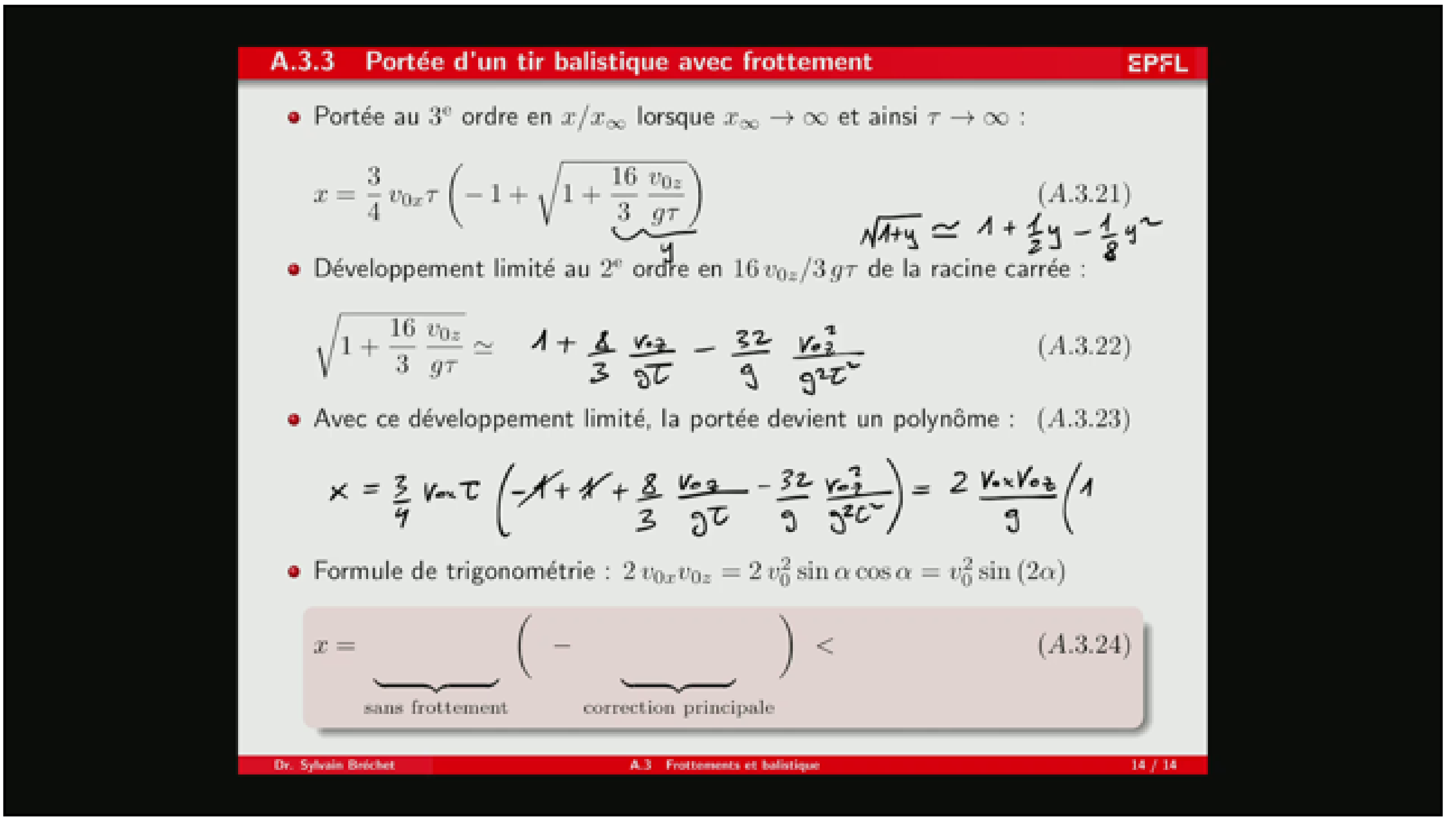



est nulle. D'accord ? Donc on prend z∞ et on impose que ça soit égal à 0. Ok ? Donc, on multiplie par moins un en passage, on a 1 tiers de g sur v∞ au cube tau, fois x³, plus une demi de g sur v∞ au carré, x², moins v∞ sur v∞, fois x, qui est égal à 0. D'accord ? Alors si on regarde cette équation du troisième degré, ce qu'on voit tout de suite, c'est que tous les termes sont proportionnels à x. Donc on peut factoriser par x. x√0 n'est pas intéressant, c'est le point de départ. C'est x différents zéro qui nous intéressent. Ce qui va nous donner en fait une équation du deuxième degré. Au passage, on va multiplier en fait cette équation par 3 v∞ au cube 1, fois tau sur gx, pour avoir un terme de, si vous voulez, un coefficient qui multiplie le terme du deuxième degré, qui est égal à... On aura donc x², plus les 3 demi de v0x, tau, fois x, moins 3, v0x², fois v0z, divisé par g, qui est égal, c'est pas un 9, c'est un g, qui est égal à 0. D'accord ? Alors il faut trouver les solutions de cette équation. Bon voilà, c'est les solutions de l'équation du deuxième degré. On connaît la forme de ces solutions. Ce sont les suivantes. x sera de la forme. Moins les 3 quarts de v0x, fois tau, plus ou moins la racine carré du discriminant réduit, qui est les 9 16e de v0x², tau², plus 3 fois v0x², v0z, tau sur g. Ok ? Alors ce qu'on voit tout de suite, c'est qu'il y a 2 solutions possibles, une solution avec un signe, plus une solution avec un signe moins. On tire la balle vers la droite, le but, le point matériel. Donc, la coordonnée x doit être positive. Évidemment que le signe négatif est

notes

résumé

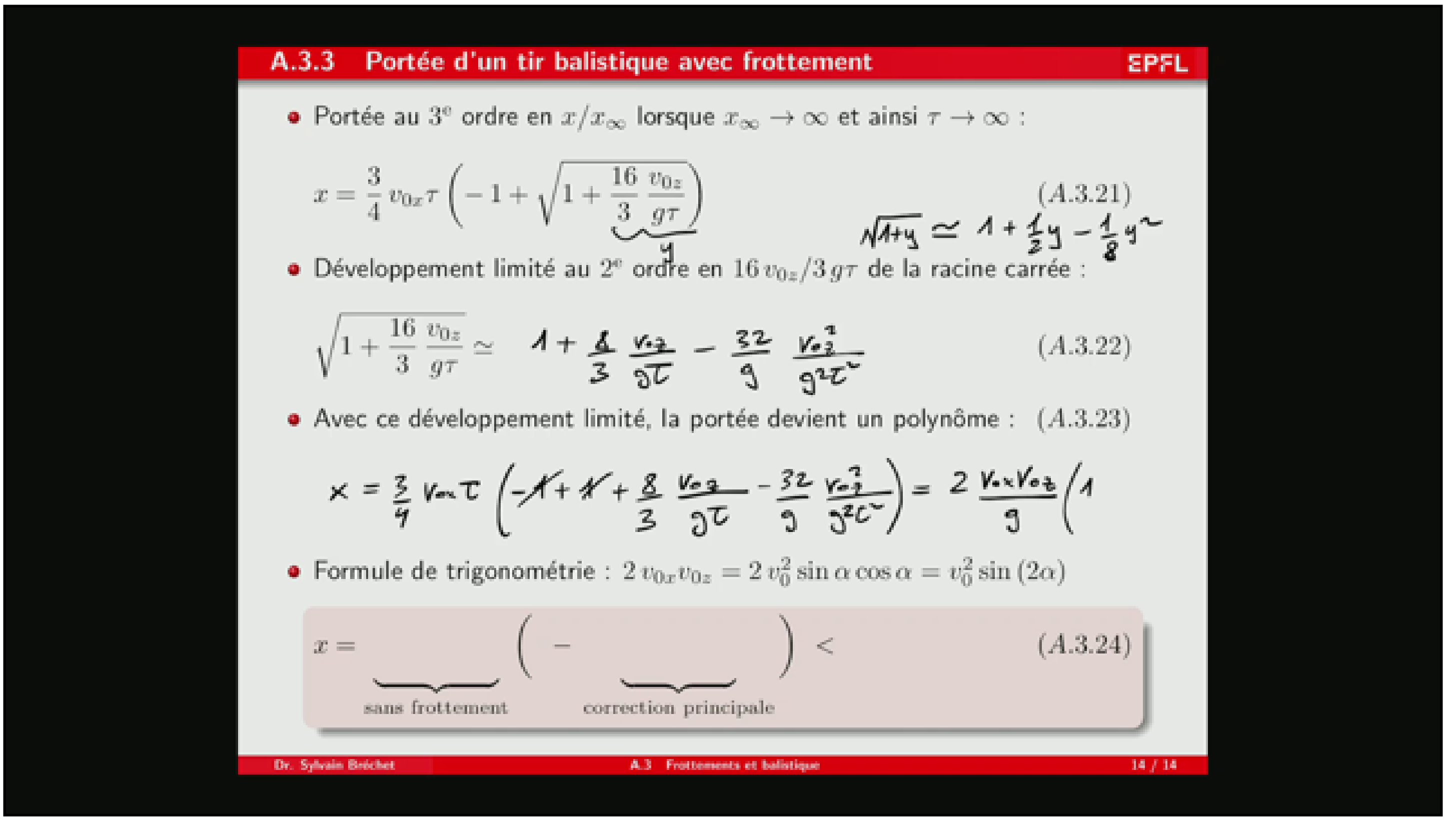
21m 25s




à rejeter, il est absurde du point de vue physique. Celle signe positive qu'il faudra garder. Au passage, on voit apparaître ici le carré du terme qui est là. D'accord ? Donc on va mettre en évidence ce carré qui va se traduire par le terme qui est ici. On va le faire aussi pour le deuxième terme. Et donc globalement, la solution sera la suivante. x, c'est les 3 quarts de v0x, tau, qui multiplient moins 1, plus la racine carré de 1, plus les 16e de v0z, divisé par g, tau. Bon, on a notre solution mais elle n'a pas la forme qu'on veut. Pourquoi ? On aimerait une portée qui est la structure suivante. C'est la portée sans frottement, plus un terme de correction lié au frottement. Bon, qu'est-ce qu'on peut faire en partant d'ici ? Eh bien, il y a une solution. On peut faire un deuxième développement limité et c'est ce qu'on va faire. D'accord ? Pourquoi ? Parce qu'on sait que tau est grand. Bon, si tau est grand, forcément, que ce terme-ci qui n'a pas de dimension physique va être beaucoup plus petit que 1. D'accord ? Supposons que ce soit le cas. Donc on est dans la limite d'un petit frottement. Et alors on fait un développement limité au deuxième ordre de la structure suivante. 1 plus y, pendant la racine carré, qui lorsque y est petit, y ? C'est ceci ? Quand y est petit, ceci, au deuxième ordre, c'est 1 plus une demi de y moins un huitième de y au carré. Bon, très bien. On l'écrit explicitement. D'accord ? Ceci va nous donner donc 1 plus les huitières de v0z sur gtao, moins le 39e de v0z au carré sur gktao carré. D'accord ? Alors maintenant, on substitue ce résultat dans la solution qui nous intéresse, qui est x. X sera donc les trois quarts de v0xtao qui multiplient

notes

résumé




moins un, plus un. Tiens, il se simplifie. Plus les huitières de v0z, divisées par gtao, moins les 39e de v0z au carré sur gktao carré. D'accord ? Et alors, ceci, on peut un petit peu le remettre en forme pour que ça ait une structure qui va nous paraître un peu plus physique. C'est deux fois v0x fois v0z, divisée par g, d'accord ?

notes

résumé


Qui multiplie globalement un moins les quatre tiers de v0z sur gtao. Ok ? Or, v0x c'est v0 cos alpha, v0z c'est v0 sin alpha. Et donc, le numérateur qui est ici, avec le coefficient 2 inclus, c'est deux fois v0x sin alpha cos alpha. Or, vous savez tous que deux sin alpha cos alpha, c'est quoi ? C'est le sin de deux alpha. Donc on trouve v0x sin de deux alpha. D'accord ? Bon, mettons ceci en évidence. On a donc... Voilà. On a donc v0 au carré sin de deux alpha, divisée par g, qui multiplie un moins les quatre tiers de v0 sin alpha sur gtao. Ok. S'il tente d'amortissement et infinie, il n'y a plus de frottement. S'il tente d'amortissement et infinie, ce terme-là disparaît. Donc, ça, c'est la portée en absence de frottement. C'est le carré d'avites, fois le sinus, de deux fois l'angle d'inclinaison, divisée par g. Pourquoi ? Quelle était la portée maximale qu'on a attendue tout à l'heure ? Quelle était l'angle qui donnait la portée maximale ? 45°, c'est pi sur 4. Et oui, mais deux fois pi sur 4, ça fait ? Pi sur 2. Le signe de pi sur 2, c'est 1. D'accord ? Et ça ne peut pas être plus grand. C'est pour ça que la portée est maximale pour un angle de 45°. D'accord ? Alors, que vient faire le frottement ? Le frottement va réduire la portée et il va la réduire en première approximation d'après le terme qui est donné ici. D'accord ? Et ceci est donc plus grand que la portée sans frottement, dont la valeur est v0², fois le sinus, de deux alpha sur g, on fait d'une pierre. Et donc, on trouve la solution sans frottement et sa première correction présence de frottement. Vous avez une question ? Est-ce que plutôt, je vous avais choisi dans cette vidéo, c'est 45° ? Oui,

notes

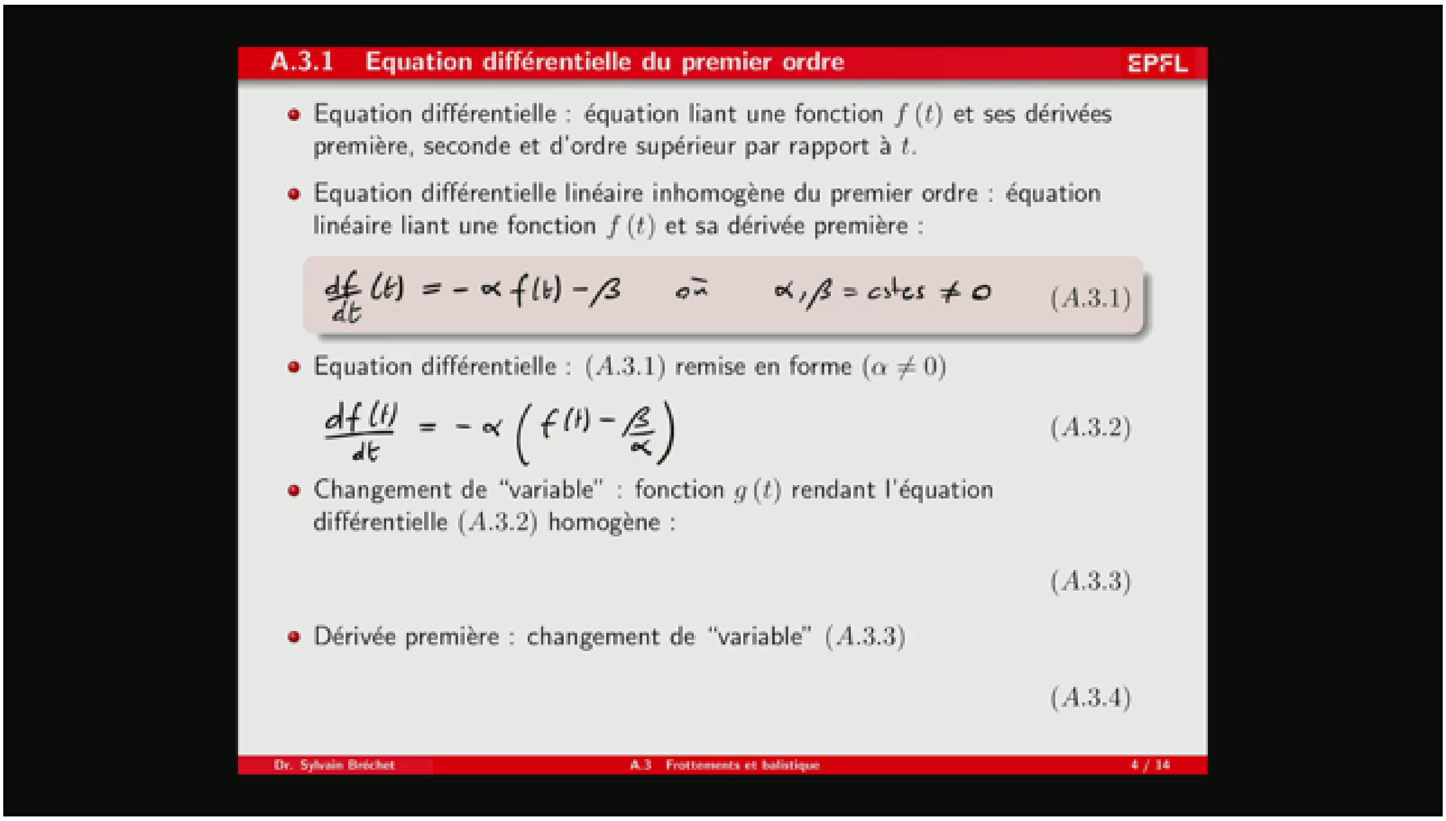
résumé

26m 37s


oui, oui. Oui, l'angle maximale sera toujours à l'angle de 45°. Quand vous tirez une petite balle et que vous faites ça en cours de gymnastique et que c'est le cours d'athlétisme et que vous voulez tirer la balle le plus loin possible, qu'est-ce que vous essayez de faire ? Je l'ai lancé à 45°. D'accord ? Vous voyez, personne qui lance sa balle comme ça. Vous voyez, personne qui lance sa balle comme ça. D'accord ? C'est à 45° pour que la portée soit maximale. D'accord ? Voilà. Alors, maintenant qu'on a fait ça, je vous propose qu'on revienne sur la structure générale

notes

résumé

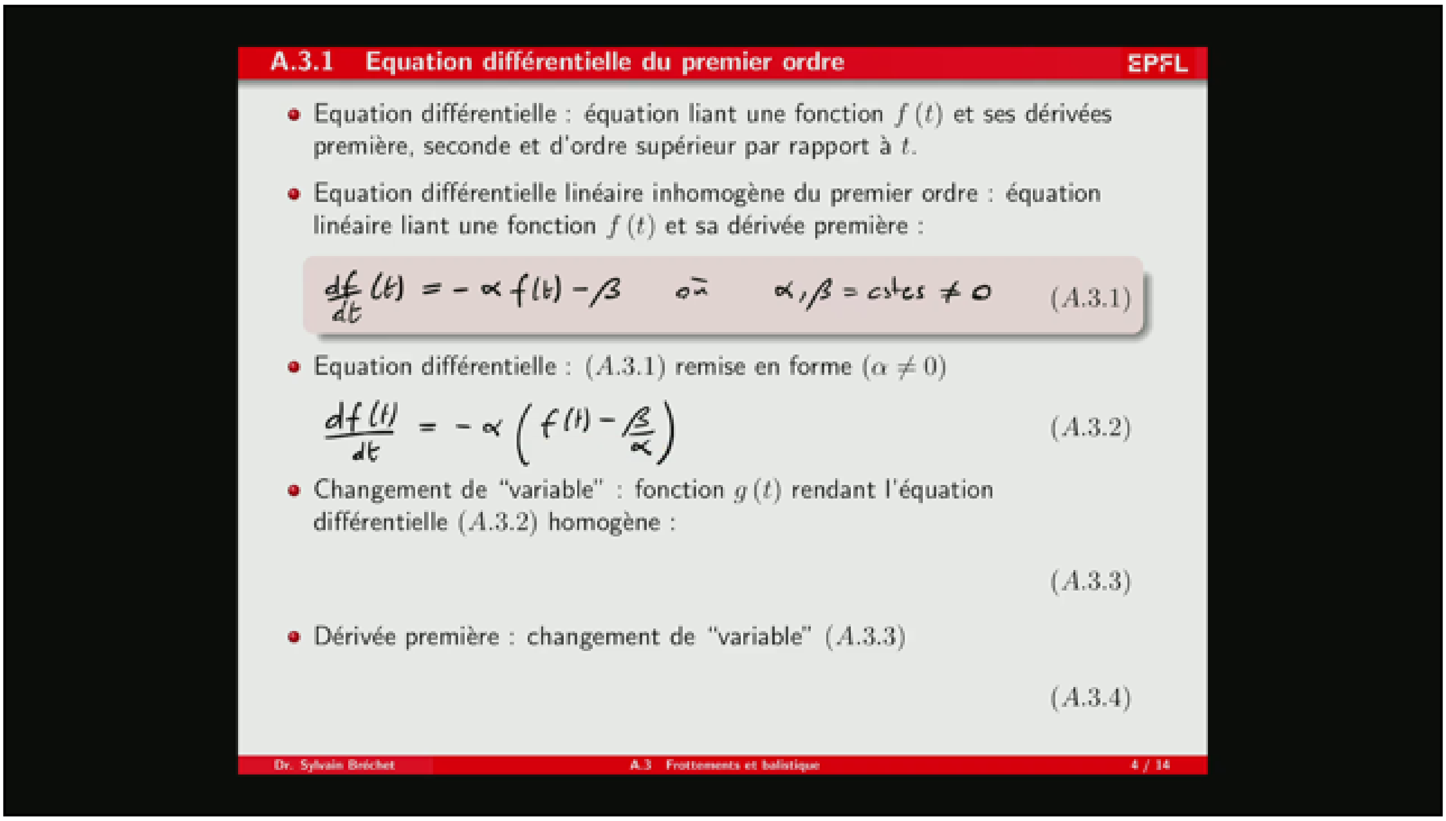



des solutions des équations différentielles du premier ordre. D'accord ? Oups. Alors, on les a appliqués ce matin. On va voir si vous voulez la description théorique. C'est presque la même chose. Mais ça sera présenté de manière un peu plus mathématique. Une équation différentielle, c'est une équation qui va lier à une certaine fonction, F2t, SC dérivée par rapport à la variable. Ça peut être la dérivée première, la dérivée seconde. Dans le cas général, ça peut être une dérivée d'ordre N. C'est une fonction de départ avec N aussi grand qu'on veut. Dans la pratique, nous, on va s'intéresser pour des équations différentielles du premier ordre à la fonction qui est liée à sa dérivée. Très bien. Prenons donc la dérivée d'une fonction F par rapport à sa variable t, qui est une fonction donc du temps. Et puis dans le cas linéaire, c'est une fonction linéaire de la fonction de départ, cette dérivée. Ce qui veut dire qu'on va pouvoir prendre une constante non nulle, alpha, pour les besoins de la cause, on va la multiplier par un signe moins, puis c'est ce qui apparaît en physique, qui multiplie la fonction F, qui dépend du temps. Et comme c'est linéaire, mais pas nécessairement proportionnel, on a encore une constante, appelons cette constante moins beta. Où ici, on va choisir volontairement alpha et beta comme étant des constantes non nulles. Et ça c'est important. Pourquoi ? Parce que ça permet en fait de mettre alpha en facteur. Cette équation qui est une équation inhumogène, puisque la dérivée de F n'est pas proportionnelle à la F, mais qu'il y a un terme supplémentaire, on aimerait la rendre homogène pour pouvoir l'intégrer. D'accord ? Donc on suppose que ce soit le cas, dans la structure même de l'équation, on écrit que la dérivée première de F par rapport au temps, c'est de la forme moins alpha, qui je vous rappelle

notes

résumé

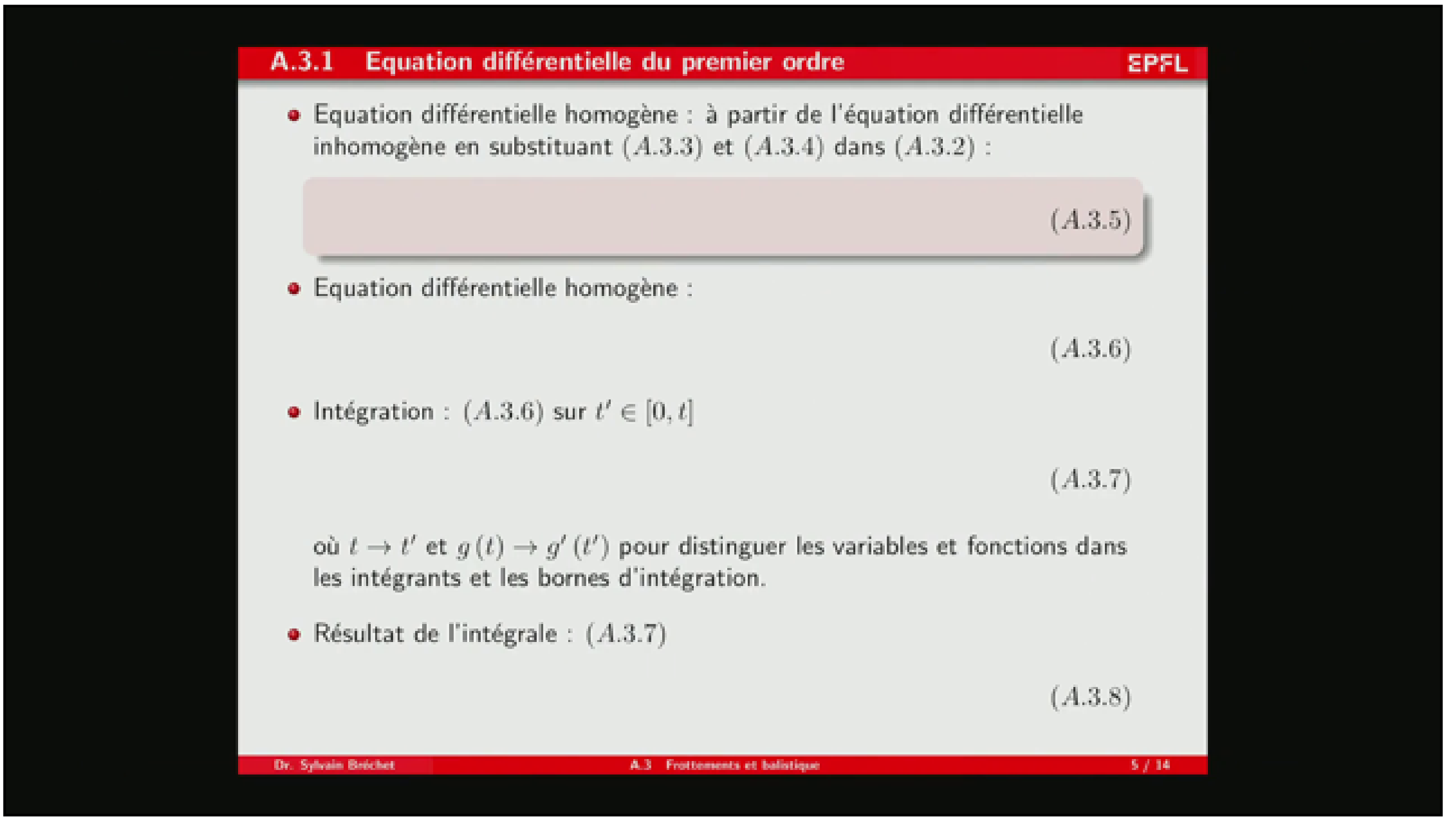
29m 32s




est non nulle. Donc c'est moins alpha, fois F2t, moins beta sur alpha comme il est non nulle, on peut diviser par alpha. Ok ? Alors maintenant, il faut prendre un changement de variable. Alors, c'est un changement de variable par abus de langage, puisque la variable est elle-même une fonction. D'accord ? Faut considérer la variable comme étant la fonction. Donc ce changement de variable nous est livré sur un plateau, puisque la dérivée de F moins beta sur alpha par rapport au temps sera égale à la dérivée de F.

notes

résumé

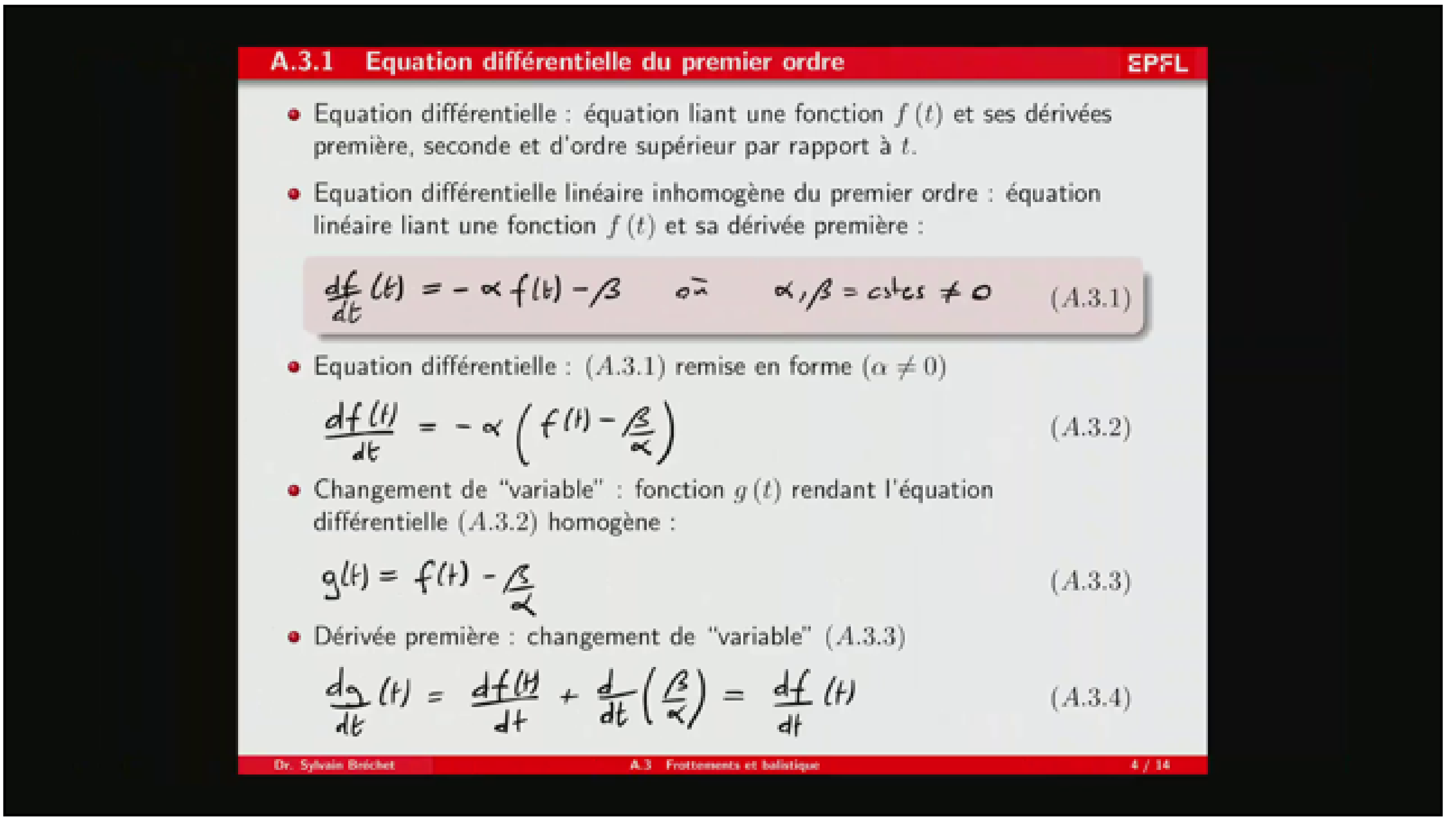



D'accord ? Mais si ça, c'est notre nouvelle fonction, alors automatiquement, la dérivée première de la nouvelle fonction sera proportionnelle à la nouvelle fonction, on pourra intégrer pour résoudre. D'accord ? Donc le changement de variable, on a qu'à le lire. La nouvelle fonction, appelons-la G2t, c'est l'ancienne, qui est F2t plus une constante, cette constante, c'est moins beta sur alpha. Ok ? Alors vérifions que les dérivées premières coincident, donc la dérivée première de G par rapport au temps, va donc être par l'inéarité de l'opération dérivation, c'est la dérivée première de F par rapport au temps, plus la dérivée, alors je parle du temps, mais de la variapté, c'est la dérivée par rapport à T du rapport de beta sur alpha, alors beta et alpha sont des constants, ce qui signifie bien sûr que leur dérivée par rapport à la variable est nulle, et donc il nous reste la dérivée de la fonction des parts F par rapport à sa variable T. Très bien. Donc maintenant, si on prend cette équation-là, dans le membre de gauche, la dérivée de F par rapport à T, c'est la dérivée de G, dans le membre de droite, F2t moins beta sur alpha, cg aussi. Ok ?

notes

résumé

32m 1s

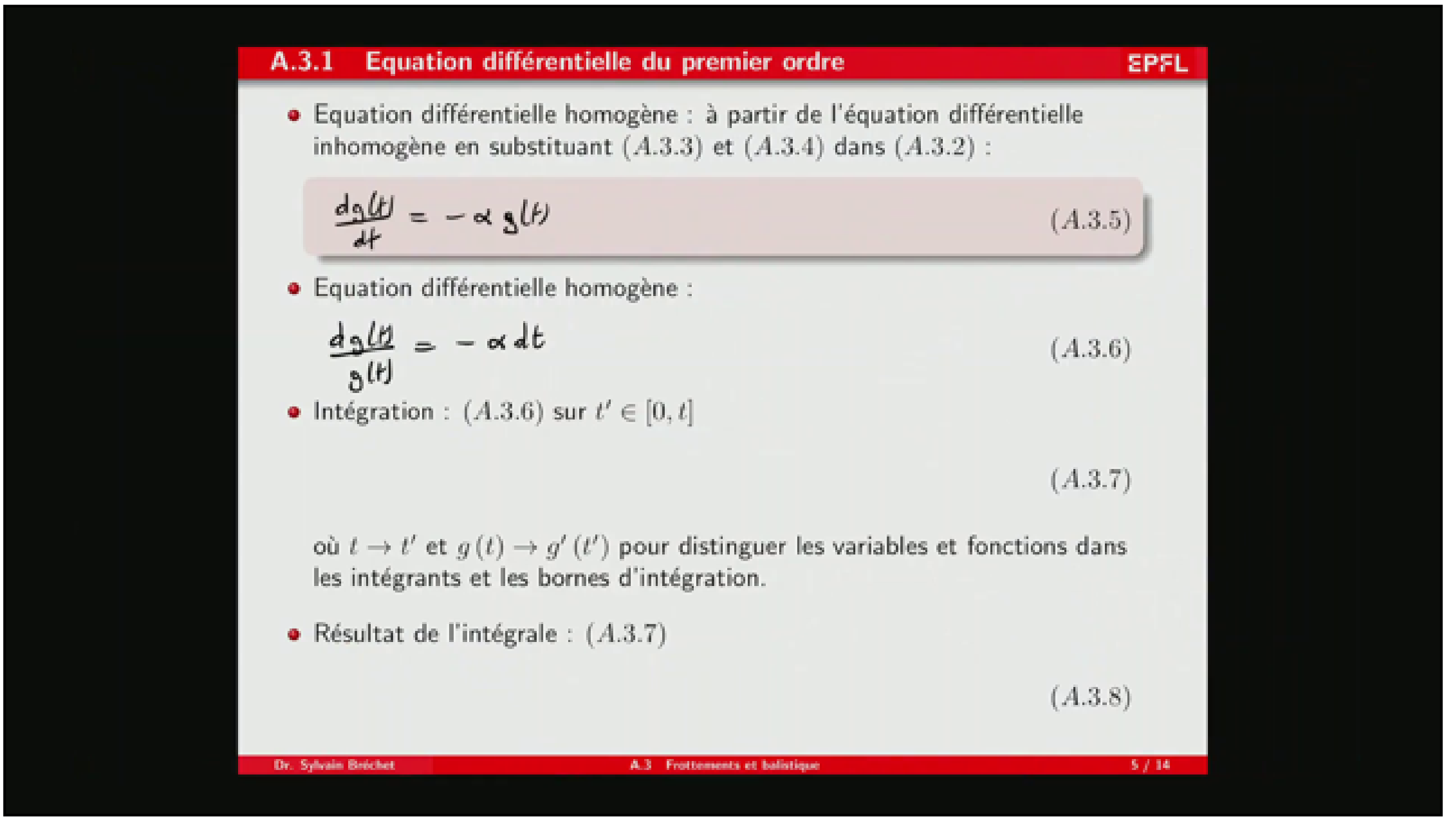



Donc on va voir que la dérivée de G par rapport au temps est égale à moins alpha fois de g2t. Ok ? L'équation est devenue homogène, on peut donc l'intégrer. Pour l'intégrer, on divise par g2t, on multiplie par dT. On a donc dg2t sur g2t, on a mis les termes dépendant de la fonction à gauche, et à droite, on a moins alpha fois dT. Très bien. Donc maintenant, on va intégrer sur l'intervalle, qui dépend de notre variable, qui va de 0 à T. Mais attention. Comme dans l'intégrant, on a la variable T, et qu'on a la fonction G qui va apparaître dans les bancs d'intégration, on est obligé d'effectuer la distinction. Il y a une question au fond. Attendez.

notes

résumé

33m 15s

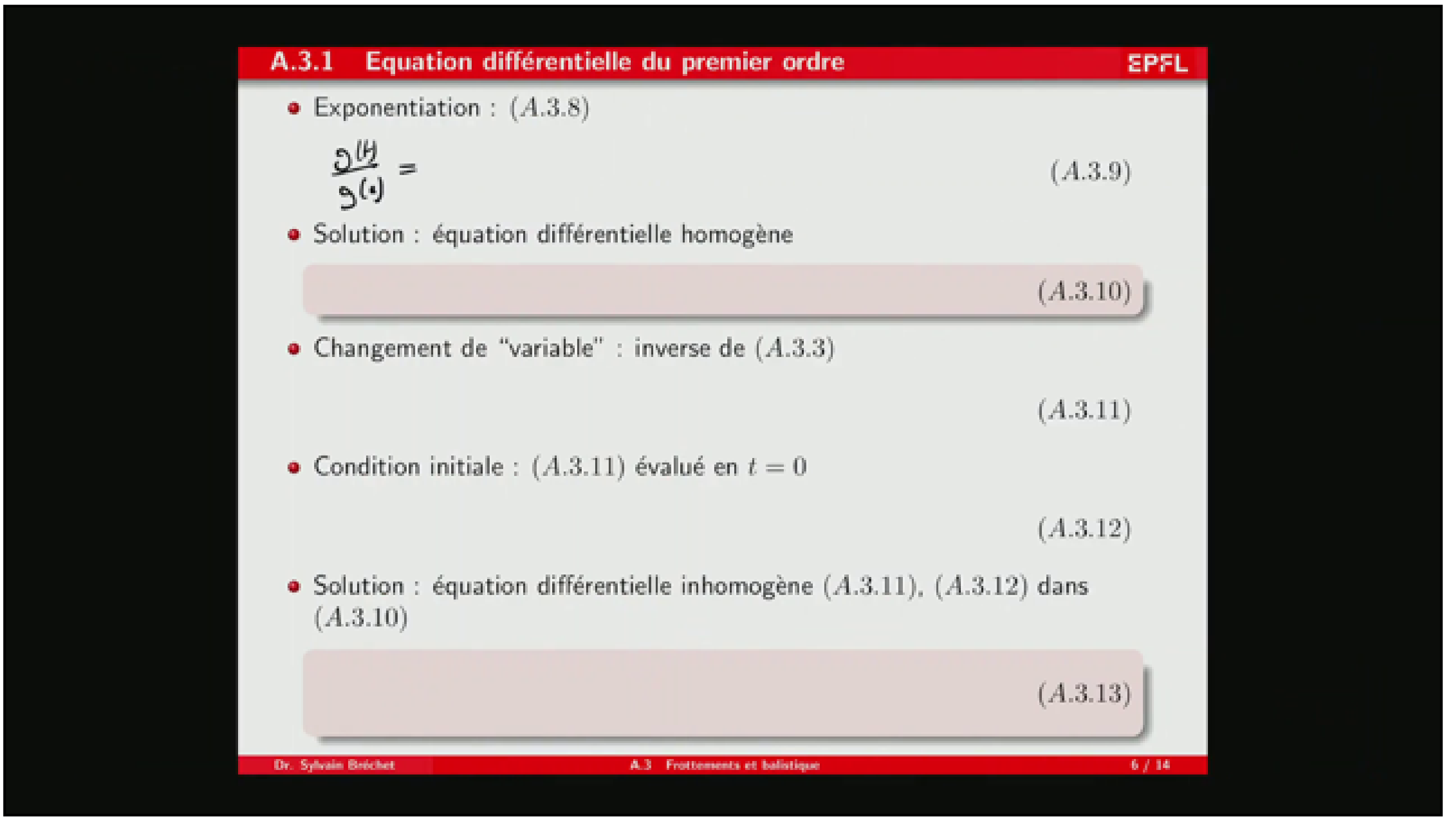



Qu'est-ce que j'ai écrit ? J'ai fait une erreur quelque part. Oui, ça doit être un plus. Attendez, voilà. Évidemment, ça doit être un plus. Je l'ai fait un peu rapidement. Je vous remercie, c'est effectivement un plus.

notes

résumé

34m 16s

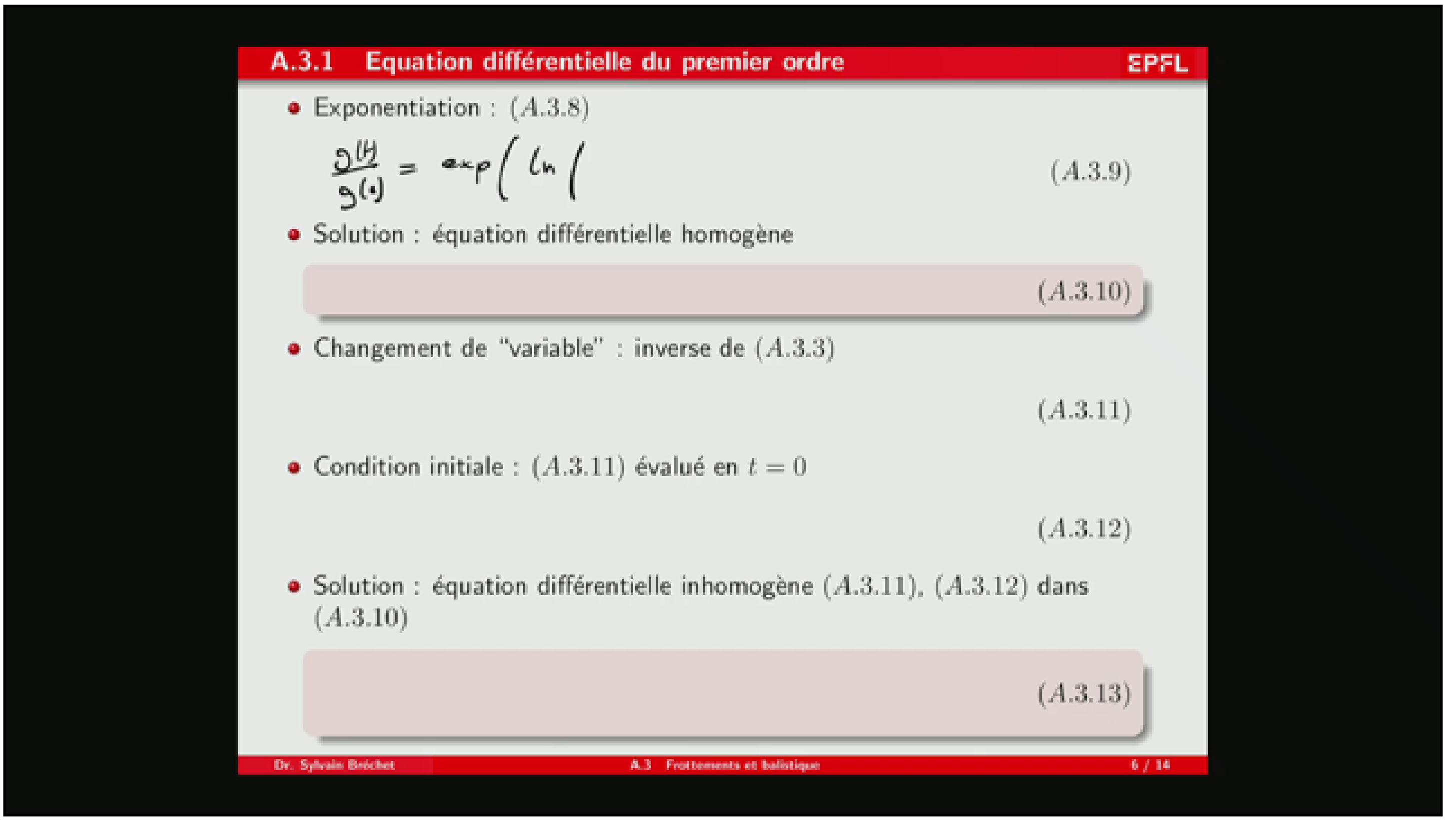



C'est très bien. Donc si je fais des petites fautes de signe, voilà, n'hésitez pas à m'interrompre, c'est important. Et puis ça montre que vous suivez, que vous comprenez le cours. Très bien. Donc, intégrons maintenant cette équation différentielle. Donc, on va intégrer l'homme en v de gauche par rapport à T. Donc, on a moins alpha, et on intègre de 0 à T. Ce qu'on intègre, c'est des T-primes. On fait ce changement de variable pour éviter une tautologie. Dans l'homme en v de gauche, on a des G-primes, de T-primes sur G-primes, de T-primes, qu'on va donc intégrer de G évaluant 0 à G évalué en T. Donc, on se retrouve avec le logarithm naturel du rapport de G de T sur G de 0, qui est égal à moins alpha fois T. Bon, nous, ce qui nous intéresse, c'est G de T. Alors, l'argument du logarithm soit G de T sur G de 0. Oui. Ah ! Bon. C'est ça. Bernan-Cor, absolument. Voilà. Vous savez, depuis toutes leurs paparaces sur les votations, ils sont très occupés, donc voilà. Parfois, il y a un petit temps de latence aussi.

notes

résumé

34m 29s

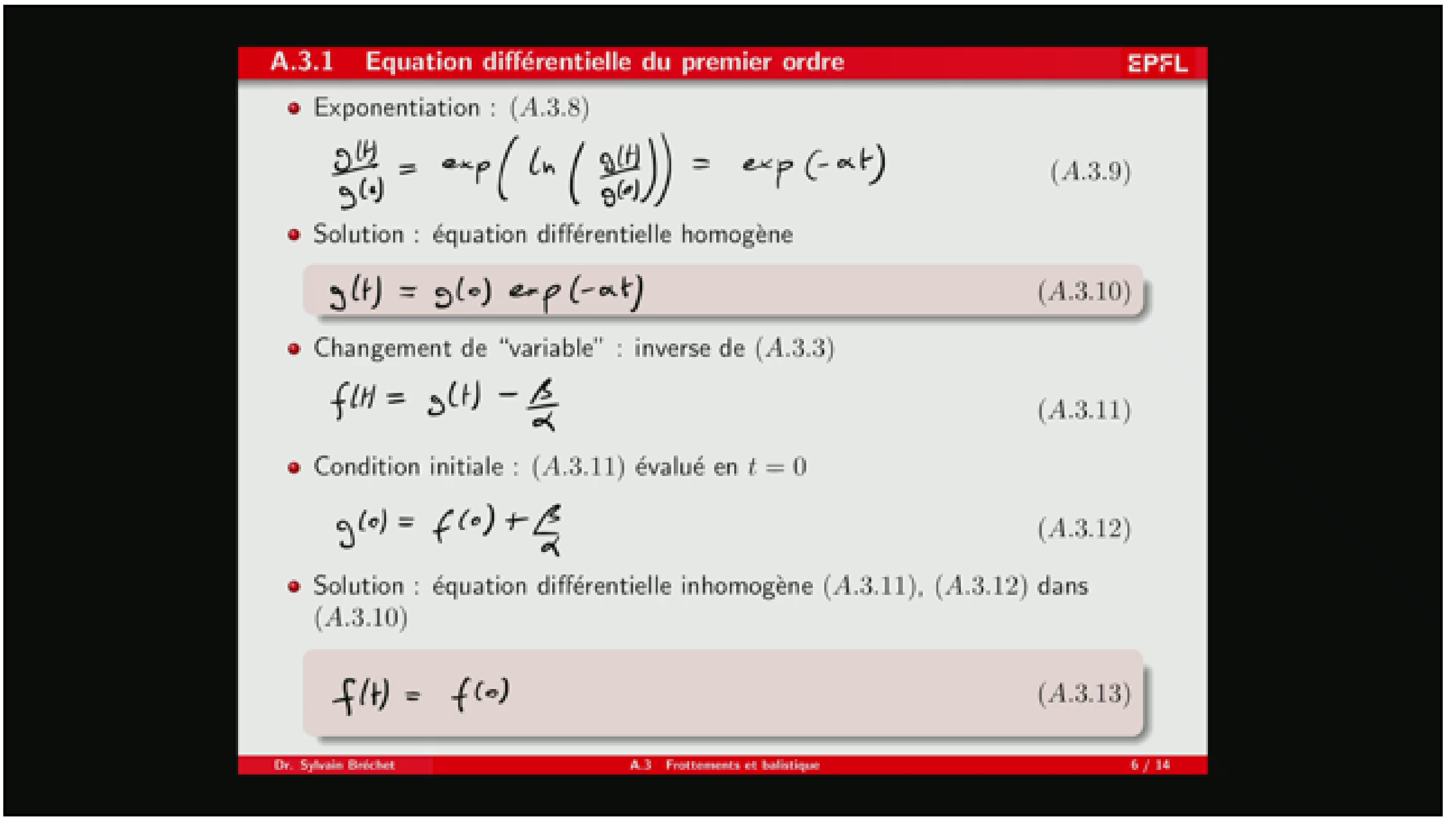



Donc, G de T sur G de 0, c'est l'exponentiel

notes

résumé

35m 46s




du logarithm naturel de G de T sur G de 0. De la police n'aurait pas dit mieux. Et ceci est bien sûr égal à l'exponentiel de moins alpha fois T. D'accord ? Voilà. Donc, clairement, si on prend la fonction qui satisfait l'équation différentielle homogène, eh bien, G de T sera égal à sa valeur initiale G de 0 fois l'exponentiel de moins alpha fois T. Bon. Non, ce qui nous intéresse, c'est pas G de T, c'est F de T. Alors bon, on prend le changement de variable inverse, c'est-à-dire que F de T sera égal à G de T moins le rapport de beta sur alpha. Ok ? Et puis au passage, on aura besoin d'exprimer G de 0 en termes de F de 0. Alors là, on prend le changement de variable évalué en 0, soit G de 0, qui est F de 0, plus beta sur alpha. D'accord ? Bon, alors maintenant, on prend F de T. Dans F de T, on substitue G de T. Et dans G de T, on substitue G de 0. Et on se retrouve donc avec F de T. Oui, je disais... apparemment, le style est fait de la résistance.

notes

résumé

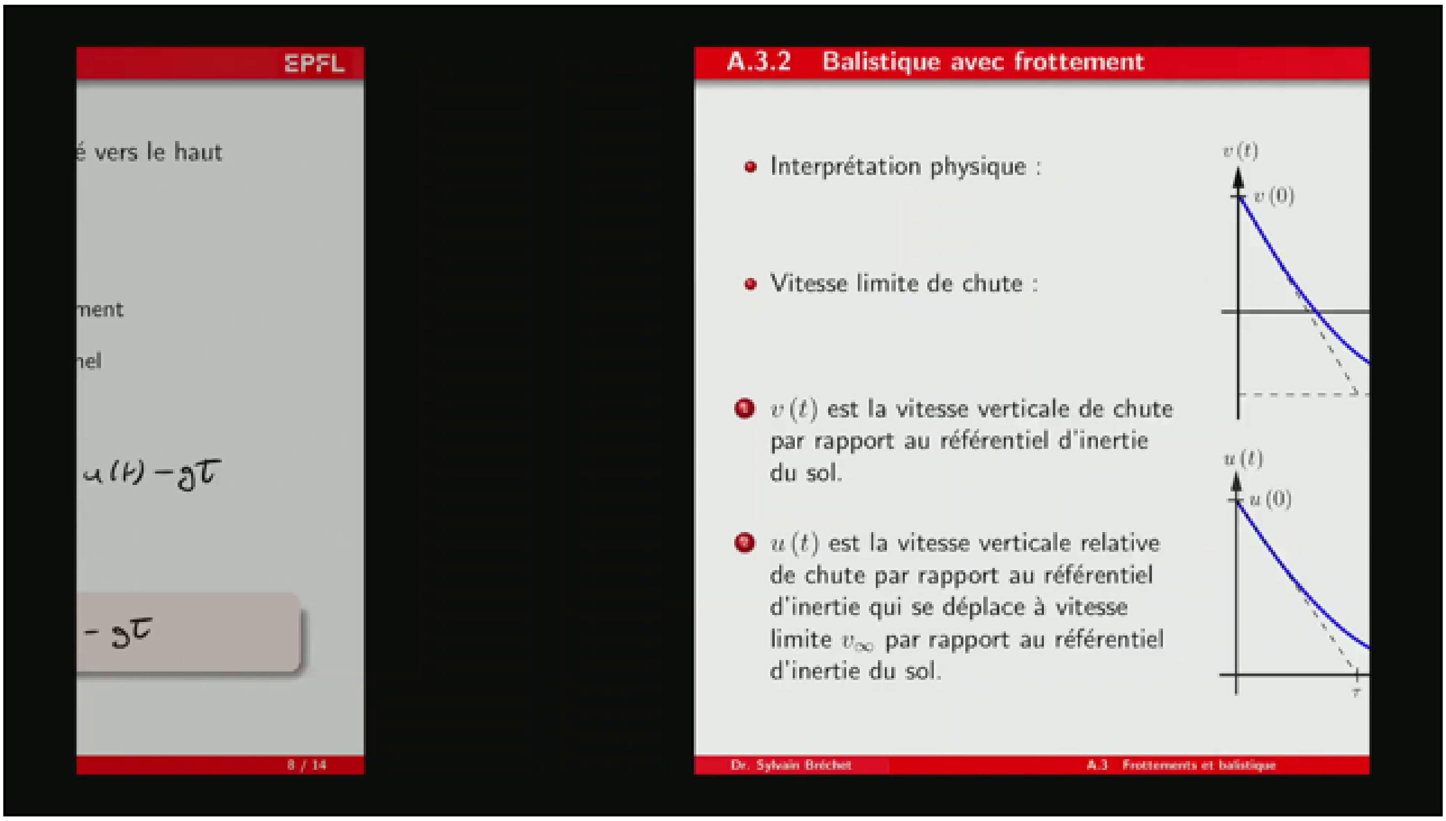
35m 53s


Donc on a F de T, qui est égal à F de 0 plus beta sur alpha, qui multiplie l'exponentiel de moins alpha T, moins beta sur alpha. Et ça, c'est en fait la structure qu'on a trouvé ce matin pour la composante verticale de la vitesse qui satisfaisait une équation différentielle inhomogène du premier ordre. Donc maintenant, on va faire un lien rapide avec ce qu'on a fait ce matin, d'accord ? Et regarder ce qui se passe

notes

résumé

37m 26s

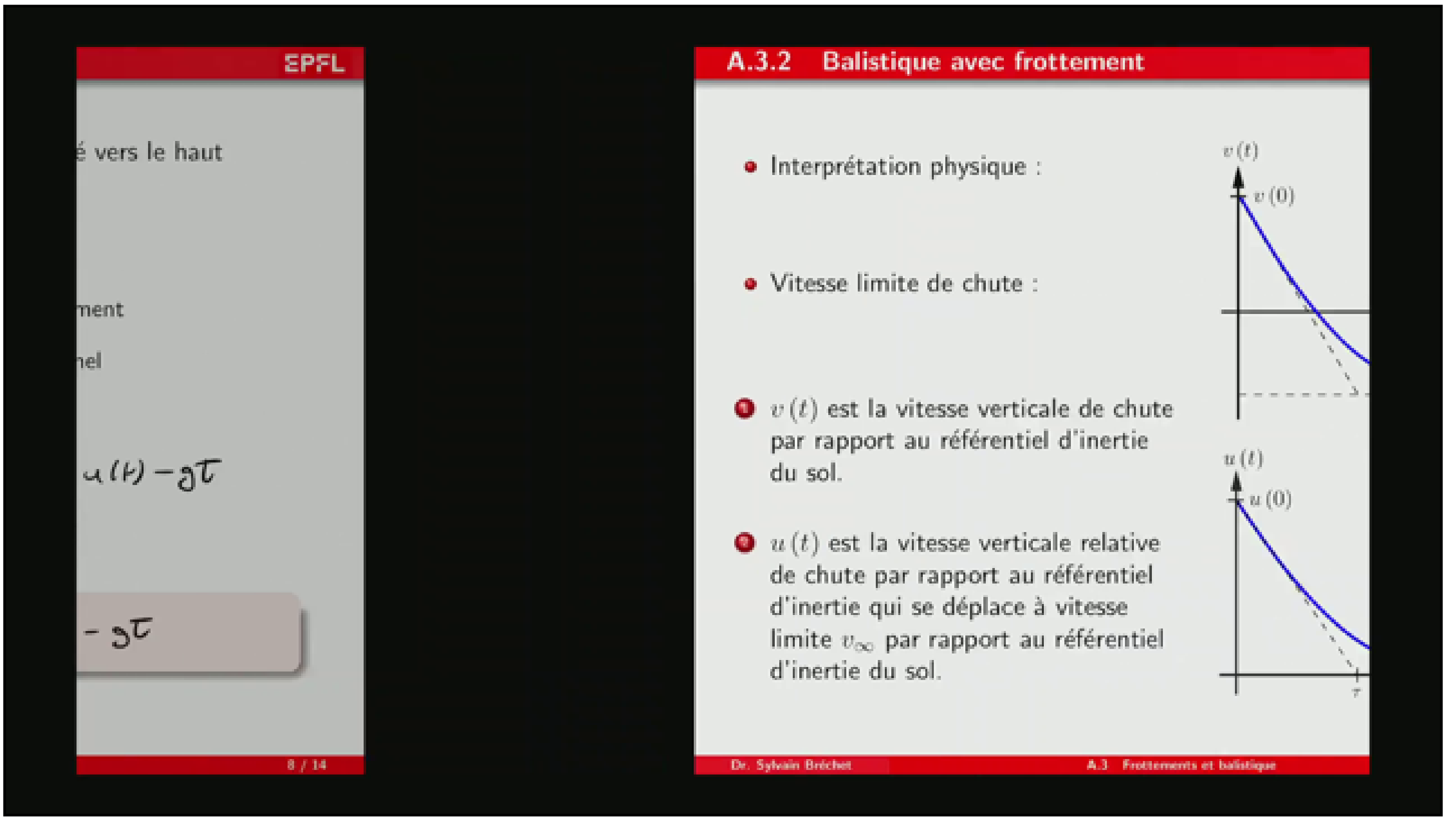



dans le cas d'un mouvement ballistique vertical. D'accord ? Selon l'axe OZ, qu'on va orienter vers le haut. Pour simplifier un tout petit peu l'écriture, on laisse tomber les indices, d'accord ? Il est entendu que les vitesses qui vont intervenir sont des vitesses verticales, OK ? Donc la fonction F de T va correspondre pour le mouvement ballistique avec frottement vertical à la vitesse V de T. La fonction G de T sera aussi une vitesse que l'on va interpréter dans quelques instants qui est eu de T, c'est même ça qui est intéressant, c'est de comprendre le sens physique du changement de variable mathématique qu'on vient de faire pour résoudre l'équation. D'accord ? Le paramètre alpha, c'est l'inverse du temps d'amortissement, et le paramètre beta, c'est tout simplement le champ gravitationnel. Alors maintenant, on applique tout ce qu'on vient de trouver, OK ? La dérivée de F par rapport au temps devient la dérivée de V par rapport au temps, qui est égale à moins alpha, c'est-à-dire moins 1 sur tau, qui multiplie F à savoir V de T, d'accord ? Plus beta sur alpha, c'est-à-dire plus G de tau. Voilà. Ensuite, la nouvelle fonction G de T qui est eu de T, c'est l'ancienne F de T qui est V de T, d'accord ? Plus beta sur alpha, c'est à dire G de tau. Et donc évidemment que V de T est U de T moins G de tau, OK ? Qui était d'ailleurs la vitesse limite. Maintenant, U de T satisfait une équation différentielle homogène, la solution est clairement la suivante. U de T, c'est U de 0, faut à l'exponentiel de moins alpha T, c'est-à-dire l'exponentiel de moins T sur tau, OK ? Alors maintenant, V de T, qui est F de T, c'est F de 0 à savoir V de 0, plus beta sur alpha, c'est-à-dire plus G de tau, qui multiplie l'exponentiel de

notes

résumé

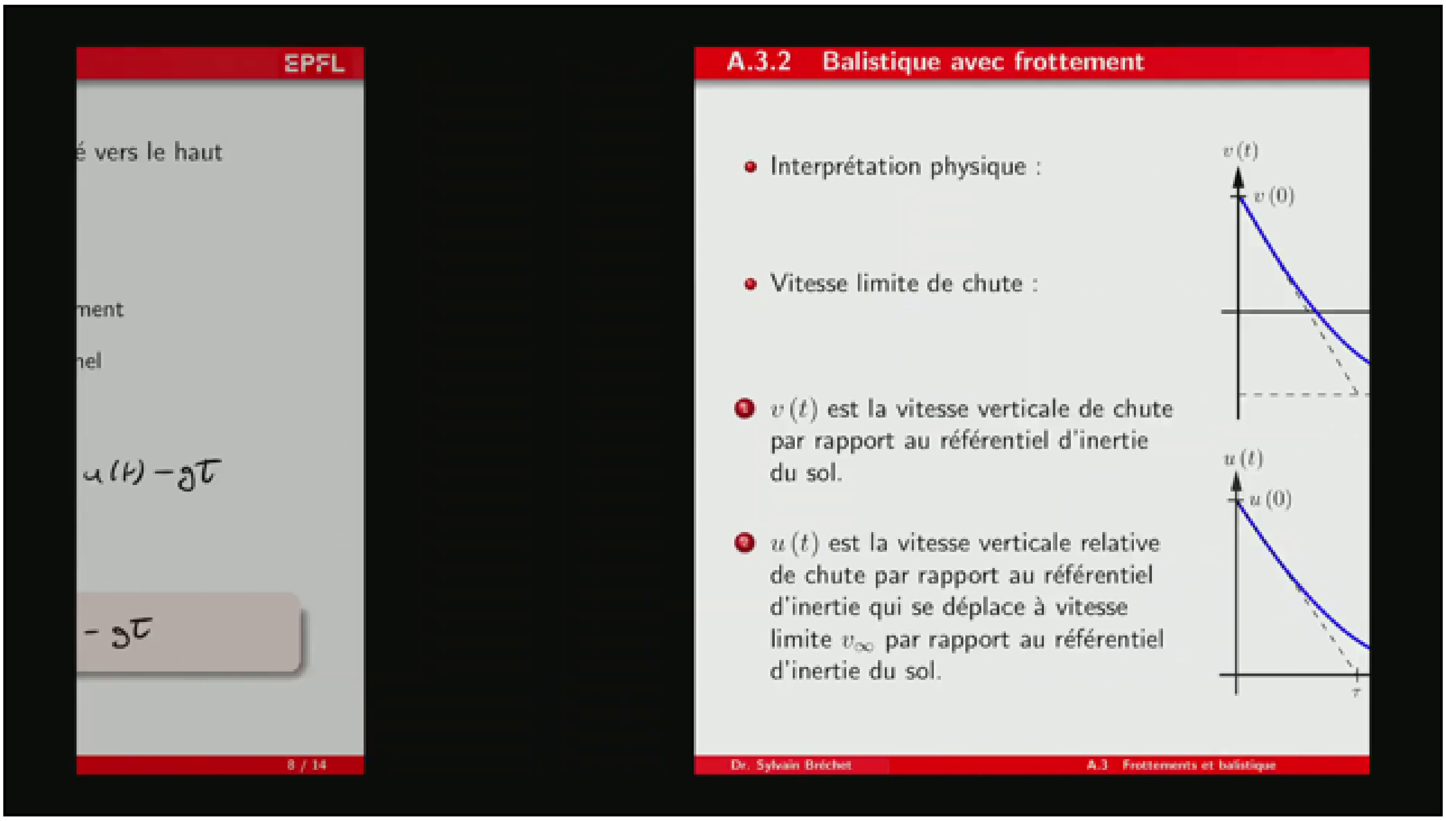
37m 53s




moins alpha T, c'est-à-dire de moins T sur tau, d'accord ? Moins beta sur alpha, c'est-à-dire moins G de tau, OK ? Voilà. Alors, c'est très joli tout ça. C'est des maths sur la physique. Concrètement, ça signifie quoi ? Qu'est-ce qu'on a fait comme changement de variable ? Comment est-ce qu'on peut l'interpréter physiquement ? D'accord ? Reprenons notre vitesse mesurée par rapport référentiel de la Terre, la vitesse verticale, V de T, qui est cette vitesse U de T moins G de tau. Et puis, la vitesse limite V infinie, c'est moins G de tau, d'accord ? Donc, concrètement, V de T, c'est U de T plus V infinie. Bon, le graphe de V de T, on le connaît, on l'a tracé ce matin, on a une décroissance exponentielle de la vitesse qui va tendre vers la vitesse limite négative, c'est-à-dire vers la symptôte horizontale V infinie, d'accord ? Alors, U de T, c'est quoi ? Eh bien, à une constante V infinie près, c'est quasiment le même graphe, sauf que la vitesse au lieu tendre vers la vitesse limite, elle tend vers zéro, d'accord ? Alors, physiquement maintenant, ça signifie quoi ? On a une vitesse relative qui va tendre vers zéro. Alors, imaginons, comme la différence entre les deux vitesses, c'est la vitesse infinie, imaginons maintenant qu'on a deux référentiels. Un premier référentiel qui est le référentiel de la Terre. Par rapport à ce référentiel là, le mouvement vertical se fait à vitesse V. Eh bien, le deuxième référentiel qui intervient, c'est un référentiel qui a un mouvement rectiline uniforme par rapport au premier, qui se déplace verticalement à la vitesse limite qui avait infini, d'accord ? Et donc, U de T, c'est quoi ? C'est la vitesse de notre point matériel par rapport à ce deuxième référentiel là. C'est-à-dire qu'on a fait une transformation d'inertie, on est parti du référentiel du sol pour arriver au

notes

résumé




référentiel qui se déplace verticalement à la vitesse limite et donc le changement de variable est en fait physiquement un changement de référentiel. C'est comme ça qu'on peut l'interpréter et c'est pour ça que ça marche, d'accord ? Voilà, il nous reste deux, trois minutes. Je crois que je vous ai mangé deux, trois minutes sur une pause. Donc on va s'arrêter là. Je vous souhaite une excellente fin de journée. N'oubliez pas la séance d'exercice de vendredi avec le problème d'accident. On se retrouve la semaine prochaine et en cas de besoin, n'hésitez pas à faire bon usage de la séance de soutien du lundi soir.

notes

résumé